

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

197
CC
C
1.63



Comportamiento Autosemejante en Problemas con Difusión no Lineal

Fernando Quirós Gracián



RBC. 63.858

Memoria para optar al título de
doctor en ciencias matemáticas
Director: Juan Luis Vázquez Suárez
Madrid, septiembre de 1996

A mi familia

ÍNDICE

PREFACIO.	v
Parte A. La ecuación de los estallidos turbulentos	1
CAPÍTULO I. Introducción	2
CAPÍTULO II. Soluciones autosemejantes de tipo (T1) para $k \geq 0$	11
§1. El teorema principal en dimensión uno	11
§2. Disparo desde la frontera libre	13
§3. Transversalidad y monotonía	20
§4. Construcción de la rama de soluciones	22
§5. Fórmulas explícitas	24
§6. El resultado en varias dimensiones	25
CAPÍTULO III. Soluciones autosemejantes de tipo (T1) para $k < 0$	33
§1. Soluciones autosemejantes reactivas de tipo (T1)	33
§2. Resultados numéricos	40
CAPÍTULO IV. Nuevos tipos de autosemejanza	44
§1. Soluciones con explosión en tiempo finito	45
§2. El caso crítico. Autosemejanza exponencial	48
CAPÍTULO V. El problema unidimensional: regularidad de las soluciones y de la frontera libre	52
§1. Una ecuación del calor no lineal con absorción	53
1.1 Preliminares	53
1.2 Regularidad de las soluciones	63
1.3 La frontera libre	67
§2. La ecuación de los estallidos turbulentos: regularidad de las soluciones e interfases	72
CAPÍTULO VI. El límite $m \downarrow 1$. Convergencia a una ecuación de Hamilton-Jacobi ..	74
§1. La ecuación límite	75
§2. Convergencia	80
CAPÍTULO VII. Autosemejanza en el caso $m = 1$	84
§1. $\kappa \geq 0$. Límite $m \downarrow 1$	85
§2. Continuación de la rama para valores de κ negativos	92
§3. $\kappa \leq -\pi^2$. Soluciones con $\gamma = -\infty$	98
§4. Soluciones autosemejantes del problema con $m = 1$	99

REFERENCIAS	101
Parte B. Comportamiento asintótico similar de dos problemas de frontera libre	103
CAPÍTULO I. Introducción: el problema de Stefan y el problema de Hele-Shaw ..	104
§1. Introducción	104
§2. Preliminares	107
CAPÍTULO II. El problema de Hele-Shaw	112
§1. El caso radial	112
1.1 Solución radial explícita	112
1.2 Límite interior	114
1.3 Límite exterior	115
§2. El caso general. Límite interior	115
§3. El caso general. Límite exterior	117
CAPÍTULO III. El problema de Stefan	121
§1. Límite exterior para soluciones radiales ($n \geq 3$)	121
§2. Límite exterior para soluciones radiales ($n = 2$)	128
§3. Soluciones generales	130
3.1 Límite interior	130
3.2 Límite exterior	132
REFERENCIAS	134

PREFACIO

En esta memoria se tratan dos problemas diferentes ligados por una idea común: las soluciones autosemejantes desempeñan un papel importante a la hora de describir el comportamiento asintótico para tiempos grandes de las soluciones de ecuaciones de evolución no lineales. Sin embargo, las dificultades y técnicas empleadas en uno y otro caso son completamente distintas. Por ello hemos decidido dividir la memoria en dos partes completamente independientes, cada una de ellas con una introducción, referencias y numeración propias.

En la parte A se estudia la ecuación de los estallidos turbulentos, un modelo de mecánica de fluidos que describe la evolución de una capa turbulenta plana en un fluido incompresible. En este caso la dificultad está en la construcción de las soluciones autosemejantes que dan el comportamiento asintótico intermedio, y los problemas que aparecen son, en su mayoría, problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

En la parte B consideramos el comportamiento asintótico de las soluciones de dos problemas de frontera libre en un dominio exterior: el famoso problema de Stefan que describe la evolución de una mezcla de agua y hielo, y una versión simplificada del mismo que corresponde al límite con calor específico cero, el problema de Hele-Shaw. Probamos que, si la dimensión espacial es mayor o igual que dos, ambos problemas tienen el mismo comportamiento asintótico. En este caso no hay soluciones autosemejantes del problema. Es necesario considerar por separado el comportamiento en el interior del conjunto de positividad y en la frontera libre. El comportamiento en el interior del conjunto de positividad viene dado por la solución del problema de Dirichlet exterior para el laplaciano, y cerca de la frontera libre por una solución autosemejante singular del problema de Hele-Shaw en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, con una singularidad como la del laplaciano. Para determinar completamente esta última solución es necesario hacer una conexión de ambos desarrollos asintóticos, la mayor dificultad de esta parte. El principio de comparación, válido para estos dos problemas de frontera libre, desempeña un papel esencial.

La numeración de los capítulos, fórmulas y resultados de ambas partes es, como hemos dicho, absolutamente independiente. Dentro de cada capítulo las fórmulas se describen por su sección y número; así, (3.12) se refiere a la fórmula 12 de la sección 3. Cuando sea necesario hacer referencia a un capítulo diferente (siempre de la misma parte), añadiremos el capítulo en números romanos, verbigracia (III.1.12). Haremos una excepción a esta última regla con algunas fórmulas especialmente importantes que se distinguen por llevar letras

en la etiqueta. Los teoremas, proposiciones, lemas, corolarios y definiciones se numeran, sin distinguir entre ellos, de forma similar.

Finalmente, quiero expresar mi agradecimiento a aquellas personas que han hecho posible que esta tesis haya visto la luz. En primer lugar a Dioni y Adolfo. Dioni me animó muchas veces a dejar mi anterior profesión para dedicarme a las matemáticas. El ver cuánto disfrutaba mi hermano, no sólo con la investigación, sino también con la enseñanza de nuestra disciplina, acabó por decidirme a lanzarme a esta aventura, algo de lo que todavía no he tenido ocasión de arrepentirme.

A Juan Luis, por todo el tiempo y la ayuda que me ha dedicado. He tenido una gran suerte al dar con él mis primeros pasos por el mundo de la investigación. Pero, sobre todo, quiero agradecerle la confianza que siempre ha depositado en mí.

A mis sufridos compañeros de despacho, Omar, Manuela y Sonsoles, quienes han aguantado con notable paciencia mi incesante charla. Convivir con ellos me ha resultado terriblemente agradable. Los dos primeros, junto con Raúl y Jesús García Azorero, han estado además siempre dispuestos a escuchar mis digresiones sobre los problemas que constituyen este trabajo, haciendo sugerencias con frecuencia acertadas.

A Francisco Bernis, por prestarse a la ingrata tarea de actuar como *lector* de esta tesis.

A Pablo, Isabel y Javier, quienes han leído atentamente distintas versiones de este trabajo en busca de palabras mal acentuadas, comas mal puestas y deficiencias de estilo.

A Fernando Chamizo, por sus innumerables comentarios que me han permitido aclarar de manera notable la exposición de la primera parte de la memoria. En particular, el capítulo IV tiene una redacción mucho más simple y breve gracias a sus sugerencias. Además, me ha resuelto todos los problemas que se me han presentado con el \TeX .

En general a todos los miembros del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid. Me lo he pasado muy bien todos estos años intentando demostrar teoremas y preparando e impartiendo mis clases, pero también jugando al fútbol, hablando sobre la falta de respeto a los derechos humanos en el mundo, tomando unas cervezas o discutiendo la etimología de la palabra *alfóncigo*. El tiempo se me ha pasado volando, en gran medida gracias a ellos.

PARTE A

La ecuación de los estallidos turbulentos

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

En esta parte de la memoria estudiamos una ecuación parabólica no lineal, la llamada ecuación de los estallidos turbulentos,

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = l(t)\Delta u^m - k \frac{u^m}{l(t)}, \quad m > 1, \quad k \in \mathbb{R},$$

donde $u(x, t)$ es una solución no negativa definida para $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$, radialmente simétrica y con soporte compacto, en la variable espacial, de radio $l(t)$ en tiempo t . La función $l(t)$ no se conoce *a priori* y debe ser determinada como parte de la solución del problema. Estamos tratando, por tanto, con un problema de frontera libre.

Esta ecuación con $n = 1$, $m = 3/2$ y $k > 0$ fue propuesta por G.I. Barenblatt [B1] como modelo para describir la propagación de estallidos turbulentos que emanan de una fuente plana. La situación física es la siguiente: tenemos un espacio infinito lleno con un fluido incompresible inicialmente en reposo. En $t = 0$ se crea en el fluido una capa plana de turbulencia, que se difunde posteriormente dentro del fluido. En el curso del proceso se produce una disipación de la energía turbulenta en forma de calor, lo que produce un decaimiento del movimiento del fluido. Si llamamos x a la variable espacial perpendicular a la región turbulenta inicial, la ecuación de balance de energía para este flujo se transforma después de algunas manipulaciones en

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(l(t)\sqrt{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - k \frac{u\sqrt{u}}{l(t)},$$

donde $u(x, t)$, que se supone simétrica en x y positiva en el intervalo $|x| < l(t)$, representa la energía turbulenta media por unidad de masa y $k > 0$ es una constante que mide la tasa de disipación en calor.

En el caso $k = 0$, el cambio de la escala de tiempos $d\tau = l(t)dt$ permite reducir la ecuación (1) a la ecuación de los medios porosos, $u_\tau = \Delta u^m$. Si $k > 0$, haciendo el mismo cambio de escala y comparando con soluciones de la ecuación de los medios porosos, concluimos que las soluciones de (1) tienen la propiedad de que las perturbaciones se propagan con velocidad finita, esto es, si la distribución de energía turbulenta se anula inicialmente fuera de una región acotada, también se anula fuera de una región acotada para cualquier tiempo posterior. Es aquí donde la restricción $m > 1$ desempeña un papel importante, ya que la ecuación de los medios porosos sólo tiene la propiedad de velocidad de propagación finita en este caso.

En [KV] Kamin y Vázquez estudian el problema de Cauchy para la ecuación (1) con $k > 0$ y dato inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

continuo, radialmente simétrico, positivo en una bola $B_R(0)$ para algún $R > 0$ y cero fuera de dicha bola, y prueban la existencia y unicidad de una solución débil continua $u \geq 0$, que tiene simetría radial y soporte compacto en x para todo $t > 0$. También prueban que cuando t tiende a infinito esta solución tiende a una solución autosemejante de *tipo* (T1),

$$(T1) \quad u(x, t) = t^{-\sigma} f(\zeta), \quad \zeta = |x|t^{-\nu},$$

suponiendo que tal solución exista. De ahí nuestro interés por estudiar la existencia y propiedades de este tipo de soluciones. Para que una solución del tipo (T1) satisfaga la ecuación (1) los exponentes de autosemejanza, ν y σ , deben verificar

$$(2) \quad \nu = 1 - \sigma(m - 1).$$

Los primeros en detectar numéricamente el comportamiento asintótico autosemejante de las soluciones de (1) fueron Barenblatt, Galerkina y Luneva [BGL], quienes también observaron que, a diferencia de lo que ocurre con los modelos habituales de difusión no lineal, no hay una segunda relación inmediata que permita determinar ambos exponentes. Para obtenerlos es necesario resolver un problema no lineal de autovalores. Tenemos, en la terminología de Barenblatt [B2], autosemejanza de segunda especie, que es actualmente objeto de una intensa investigación [AV2, AV3]. Los correspondientes exponentes reciben el nombre de exponentes anómalos. El caso contrario, la autosemejanza de primera especie, en el que los exponentes se pueden obtener a partir de consideraciones dimensionales, aparece en mecánica de medios continuos con mayor frecuencia. Nuestro principal objetivo es mostrar que la variación del parámetro k afecta de manera crucial al valor de los exponentes anómalos, e incluso a la forma de la autosemejanza. Veremos que la variación del parámetro produce una transición a un régimen de autosemejanza distinto. Esto muestra que el parámetro k tiene un carácter esencial. De hecho no se puede eliminar mediante cambios de escala. Este comportamiento es debido a la presencia de la longitud del soporte en la formulación, un término no local.

Recientemente Bertsch, dal Passo y Kersner [BdPK1, BdPK2] han estudiado otro modelo en el que es también un parámetro no eliminable que no es un exponente el que determina los distintos regímenes de autosemejanza. Dicho modelo, que también describe la evolución de flujos turbulentos, se conoce como modelo $b - \epsilon$ (o también como $k - \epsilon$).

Para ser consistentes con trabajos anteriores y teniendo en cuenta (2), escribimos los exponentes de autosemejanza en la forma

$$(3) \quad \sigma = \frac{\mu}{m - 1}, \quad \nu = 1 - \mu,$$

y tomamos μ como exponente libre.

El problema impone soluciones con soporte compacto en la variable espacial. Como se explica en [B2] y [AV2], el perfil f y el parámetro libre μ deben ser determinados simultáneamente como la solución y el autovalor no lineal del correspondiente problema de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$(4.a) \quad l_0(f^m)'' + l_0 \frac{n-1}{\zeta}(f^m)' + (1-\mu)\zeta f' + \frac{\mu}{m-1}f - \frac{k}{l_0}f^m = 0 \quad \text{para } 0 < \zeta < l_0,$$

para algún $l_0 > 0$ finito, con condiciones de frontera

$$(4.b) \quad f(l_0) = (f^m)'(l_0) = (f^m)'(0) = 0.$$

Estas condiciones se siguen de la continuidad de la densidad de energía turbulenta, u , y del flujo, ∇u^m . Tanto f como μ dependen de k . Si extendemos la solución $u(x, t)$ asignándole el valor 0 para $\zeta \geq l_0$, es decir, para $|x| \geq l_0 t^{1-\mu}$, obtenemos una solución débil de (1). La superficie $|x| = l_0 t^{1-\mu}$ es la *frontera libre*. En realidad l_0 no es un parámetro esencial a la hora de estudiar la existencia de soluciones del problema (4) puesto que, utilizando la invariancia de la ecuación (1) bajo la transformación de cambio de escalas

$$(5) \quad u_A(x, t) = A^{1/(m-1)}u(x/A, t).$$

podemos suponer sin pérdida de generalidad que $l_0 = 1$. esto es, que el soporte de la solución autosemejante en el instante $t = 1$ es la bola de centro el origen y de radio 1. El valor concreto de l_0 que aparece al describir el comportamiento asintótico de una solución del problema de Cauchy viene determinado por el dato inicial u_0 . Dicho valor es un invariante de la dinámica del problema, ya que se conserva a lo largo del tiempo. Este fenómeno ha sido observado también en otro modelo de difusión no lineal, la ecuación de Barenblatt de la filtración elasto-plástica, $u_t + \gamma|u_t| = \Delta u$, con $0 < |\gamma| < 1$ (véase [KPV]).

En [HP] Hastings y Peletier prueban la existencia y unicidad de las mencionadas soluciones autosemejantes de soporte compacto en el caso particular $k \geq 0$, $n = 1$ y $m = 3/2$ que aparece en el modelo físico. Los autores emplean un método de disparo desde el origen, $\zeta = 0$, y un argumento de cambio de escala. También obtienen algunas propiedades interesantes del exponente anómalo μ y del perfil f , por ejemplo la dependencia continua y la monotonía de $\mu(k)$. Por otra parte, Chen y Goldenfeld [CG] obtienen un desarrollo formal en k de la solución cerca de $k = 0$, en el mismo caso $m = 3/2$, utilizando métodos perturbativos y teoría de grupos de renormalización. En particular, calculan el valor de la derivada $\mu'(k)$ en $k = 0$.

En el capítulo II utilizamos un método alternativo para resolver el problema de autovalores que, no sólo proporciona la existencia de una rama de soluciones $u(x, t; k)$ parametrizada por k , sino también la dependencia analítica con respecto a k del exponente anómalo μ . Además, f^{m-1} resulta ser una función analítica de $\zeta \in [0, 1]$ y $k \geq 0$. Consideramos el caso general $m > 1$, $n \geq 1$ y $k \geq 0$. En particular, la regularidad analítica permite justificar

los resultados de [CG] y obtener una fórmula explícita para $\mu'(k)$ en $k = 0$ en todas las dimensiones.

Explicemos las ideas más importantes de nuestro método: las dificultades para obtener regularidad tienen su origen en la existencia de una frontera libre $|x| = l(t)$, ya que la ecuación es *singular* en puntos situados sobre la misma. Sin embargo, aunque éste sea el peor lugar desde el punto de vista de la regularidad, es justo ahí donde podemos encontrar información detallada. Esto nos lleva a disparar *precisamente desde la frontera libre*. Efectivamente, un análisis cuidadoso de la singularidad muestra que, dados μ y k , hay tan sólo una manera de salir de la misma de forma no trivial a lo largo de una curva analítica. La herramienta técnica que utilizamos es un argumento de *punto fijo para funciones de varias variables complejas*. La regularidad analítica se obtiene después de factorizar la parte principal del desarrollo de f en términos de ζ cerca de $\zeta = l_0$. El método no está restringido en absoluto por las características particulares de este problema, y esperamos que sea útil en otros problemas de frontera libre. De hecho, Atkinson y Peletier [AP] utilizaron hace años un argumento de punto fijo cerca de la frontera libre para probar que la ecuación general de medios porosos sin absorción, $u_t = (k(u)u_x)_x$, admite una solución autosemejante especial con exponentes $\sigma = 0$ y $\nu = 1/2$. En la literatura aparecen también otros métodos de disparo (ver por ejemplo [PT] y [AG]).

Continuamos entonces las soluciones hasta $\zeta = 0$ y usamos el teorema de la función implícita para obtener la condición $(f^m)'(0) = 0$. Dicha condición selecciona una única solución para $k \neq 0$ por continuación a partir de una solución inicial conocida, la solución de Barenblatt para $k = 0$. Esta técnica fue introducida por Aronson y Vázquez [AV2]. Al trabajar con dimensiones mayores que uno encontramos la dificultad extra de que el punto $\zeta = 0$ es singular. Por consiguiente, no es posible en general continuar hasta el origen las soluciones proporcionadas por el disparo desde la frontera libre. Es necesario hacer una pequeña modificación del método que consiste en disparar tanto desde $\zeta = 0$ como desde $\zeta = 1$ y conectar las soluciones así obtenidas en un punto próximo a $\zeta = 0$.

El método que acabamos de describir muestra que la rama de soluciones existe también en un intervalo $-k_* < k < 0$. Esto nos lleva a considerar, en el capítulo III, la existencia de soluciones autosemejantes de tipo (T1) para valores negativos de k . Éste es un problema bastante diferente, que involucra reacción en vez de absorción, y que no se ha investigado previamente. En este caso el principio del máximo no es válido debido al efecto de $l(t)$, lo que hace más difícil el análisis matemático. Por simplicidad, a partir de aquí restringimos el estudio a dimensión espacial $n = 1$.

El método de continuación falla más allá de un pequeño intervalo de valores de k . No obstante, probamos que hay soluciones autosemejantes de tipo (T1) para cada valor $\mu < (m-1)/m$. De ello se deduce un resultado de *no unicidad* para el problema de Cauchy, dado que para $\mu < 0$ las soluciones autosemejantes toman dato inicial $u(x, 0) \equiv 0$. El método de prueba es diferente al empleado en el caso de absorción, ya que la transversalidad necesaria para aplicar el teorema de la función implícita falla cuando $k < 0$. Sin embargo, seguimos usando de forma esencial la existencia de soluciones locales en un entorno de la

frontera libre.

En otro orden de cosas, se puede probar sin mucha dificultad que sólo hay soluciones de tipo (T1) si $\mu < 1$. Por tanto, dichas soluciones tienen un soporte que se expande llegando a cubrir cualquier compacto y, además, verifican que $u(x, 0) = 0$ si $x \neq 0$. Por otra parte, un cálculo sencillo muestra que la integral $\int_{\mathbf{R}} u(x, t) dx$, a la que denominamos masa, viene dada para dichas soluciones por

$$\int_{\mathbf{R}} u(x, t) dx = 2t^{1-m\mu/(m-1)} \int_0^{l_0} f(\zeta) d\zeta.$$

Por consiguiente, si $\mu > (m-1)/m$, como es el caso cuando $k > 0$, la masa decrece con el tiempo y se hace infinita cuando $t \downarrow 0$. A las correspondientes soluciones se las conoce como *soluciones muy singulares*. Si $0 < \mu < (m-1)/m$, lo que sucede para valores de $k < 0$, aunque la solución presenta una singularidad en el origen, la masa inicial es cero. Las soluciones reciben en este caso el nombre de *soluciones débilmente singulares*. Cuando $\mu = (m-1)/m$, situación que se da cuando $k = 0$, la solución es, tras un cambio de escala en la variable tiempo, la solución de Barenblatt para la ecuación de los medios porosos. La masa se conserva y la solución es una *solución fundamental* o *solución de tipo fuente*, ya que el dato inicial es una delta de Dirac. La noción de solución débilmente singular fue introducida por Kamin, Peletier y Vázquez en [KPV], donde se estudia la existencia de soluciones autosemejantes singulares para la ecuación de Barenblatt de la filtración elasto-plástica. Las soluciones autosemejantes muy singulares fueron consideradas por primera vez por Brezis, Peletier y Terman en [BPT] al estudiar ecuaciones del calor no lineales de la forma $u_t = \Delta u - u^p$, con $p > 1$.

Cuando $\mu \leq 0$, las correspondientes soluciones de tipo (T1) no son singulares. Si $\mu < 0$, éstas tienen, como ya hemos dicho, dato inicial cero, y la masa y el máximo de la solución crecen de forma potencial con el tiempo. Si $\mu = 0$, tenemos una solución especial con dato inicial discontinuo en $x = 0$ que, sin embargo, es acotado. La masa crece ilimitadamente partiendo del valor cero, pero el máximo de la solución, que se alcanza en $x = 0$, permanece fijo. Las soluciones con $0 < \mu < (m-1)/m$, si bien tienen una masa que crece con el tiempo, tienen un valor máximo que decae de forma potencial. Estas soluciones se obtienen para k negativo con $|k|$ pequeño. La importancia relativa del término de reacción frente al de difusión, medida por $|k|$, es pequeña. El crecimiento potencial se produce para valores de $|k|$ mayores, lo que determina que el término de reacción domine.

Probamos también que, en cualquier caso, la rama de soluciones se interrumpe necesariamente después de un intervalo finito de valores de k . Concretamente demostramos que no hay soluciones del problema (4.a)–(4.b) para

$$k < -\frac{2m^2}{(m-1)^2} \left(\frac{2m-1}{m-1} \right)^{2(m-1)/m}.$$

A partir de aquí trabajaremos con el parámetro normalizado

$$\kappa = \frac{(m-1)^2}{m^2} k,$$

que, como se irá haciendo evidente en el transcurso del trabajo, es el natural para tratar esta ecuación.

Los resultados numéricos muestran que la rama de soluciones autosemejantes de tipo (T1) se aproxima a una asíntota, $\mu(k) \rightarrow -\infty$, cuando $\kappa \downarrow -\kappa_*(m)$, con $0 < \kappa_*(m) < \infty$. El valor crítico $\kappa = -\kappa_*(m)$ señala la *transición* a una región en la que el comportamiento asintótico de las soluciones no viene dado en términos de soluciones autosemejantes de la forma (T1). Tales transiciones son actualmente objeto de investigación en mecánica de medios continuos (véase [AV2, AV3] para una discusión más detallada).

La única información previa sobre la región más allá de $\kappa = -\kappa_*(m)$ proviene del trabajo de Samarskii, Zmitrenko, Kurdyumov y Mikhailov [SZKM], a partir del cual obtenemos una solución explícita de (1) con soporte fijo para el valor $\kappa = -\pi^2$. Esta solución explota en tiempo finito, lo que nos conduce a considerar soluciones autosemejantes de tipo (T2),

$$(T2) \quad u(x, t) = (T - t)^{-\mu/(m-1)} f(|x|(T - t)^{\mu-1}),$$

con $T > 0$ una constante arbitraria. Este nuevo tipo de autosemejanza se estudia en el capítulo IV, donde se prueba la existencia de soluciones de tipo (T2) para todo $\mu > 1$. Por ser $\mu > 0$ estas soluciones explotan en tiempo finito $t = T$ en todo el espacio. Tenemos lo que se conoce como *explosión global*, en contraste con situaciones en las que la explosión se produce en un solo punto (*explosión puntual*) o en una región con medida positiva finita (*explosión regional*). Los valores de $|\kappa|$ para los cuales se obtienen soluciones de este tipo son mayores que aquellos para los cuales hay soluciones de la forma (T1). La importancia del término de reacción es comparativamente mayor y la difusión no es capaz de impedir la explosión en tiempo finito. La solución obtenida a partir del trabajo [SZKM] presenta explosión regional. La reacción es en este caso tan fuerte que la explosión se produce sin que la solución tenga tiempo de difundirse. En relación con la existencia de soluciones autosemejantes con explosión global para otros modelos de reacción-difusión se puede consultar, por ejemplo, el trabajo de Galaktionov [G], donde se estudia la ecuación $u_t = (u^m)_{xx} + u^p$, con $1 < p < m$, o bien la monografía de Samarskii, Galaktionov, Kurdyumov y Mikhailov [SGKM], donde se analizan los diferentes fenómenos de explosión que aparecen en ecuaciones parabólicas no lineales.

Los resultados numéricos muestran que existen soluciones de la forma (T2) para todo $\kappa \in [-\pi^2, -\kappa_*(m))$, con una asíntota, $\mu(\kappa) \rightarrow \infty$, cuando $\kappa \uparrow -\kappa_*(m)$. La divergencia de los exponentes de autosemejanza cuando nos aproximamos al valor crítico $\kappa = -\kappa_*(m)$ sugiere buscar soluciones autosemejantes de tipo (T3),

$$(T3) \quad u(x, t) = e^{\lambda t/(m-1)} f(\zeta), \quad \zeta = |x|e^{-\lambda t},$$

con parámetro λ . Después de cambiar a la variable presión $W = mf^{m-1}/\lambda(m-1)$, obtenemos el problema no lineal de autovalores

$$(6) \quad \begin{cases} W'' + \frac{1}{m-1} \frac{W'}{W} (W' + \zeta) + \frac{\gamma}{m-1} - \frac{\kappa m}{m-1} W = 0 & \text{si } 0 < \zeta < 1, \\ W > 0 & \text{si } 0 \leq \zeta < 1, \\ W'(0) = 0, W(1) = 0 \text{ y } W'(1) = -1, \end{cases}$$

para $\gamma = -1$. Nótese que λ ha desaparecido del problema. Probamos, también en el capítulo IV, que hay un valor de κ menor que cero, $\kappa = -\kappa_*$, tal que el problema (1) tiene una solución autosemejante de tipo (T3).

Si bien los resultados numéricos muestran que el valor $\kappa = -\kappa_*$ coincide con el valor de la asíntota de las dos ramas anteriores, esto no se ha probado aún de forma rigurosa. No obstante, observamos que, después del cambio de variable $W = mf^{m-1}/(m-1)(1-\mu)$ para soluciones del tipo (T1) y del cambio $W = mf^{m-1}/(m-1)(\mu-1)$ para soluciones del tipo (T2), la función presión W es en los tres casos solución del mismo problema de autovalores (6), con $\gamma = \mu/(1-\mu) > -1$ en el primer caso, $\gamma < -1$ en el segundo caso y $\gamma = -1$ en el caso exponencial.

Aunque los resultados de los capítulos II, III y IV garantizan la existencia de una solución de (6) para todo $\gamma \in \mathbb{R}$, no somos capaces de probar ni la unicidad ni la regularidad del exponente de autosemejanza γ como función del parámetro κ , cuando $\kappa < 0$. Sin embargo, sí podemos dar pruebas completas en el caso límite que se obtiene al hacer formalmente $m = 1$ en (6). En este caso nos queda el problema

$$(7) \quad \begin{cases} W'^2 + W'\zeta + \gamma W - \kappa W^2 = 0 & \text{si } 0 < \zeta < 1, \\ W > 0 & \text{si } 0 \leq \zeta < 1, \\ W'(0) = 0, W(1) = 0 \text{ y } W'(1) = -1, \end{cases}$$

que se estudiará en el capítulo VII. Pero antes deseáramos saber si las soluciones de los problemas (6) y (7) tienen alguna relación. En particular: dado κ fijo, ¿se obtiene la solución de (7) como límite cuando $m \downarrow 1$ de soluciones de (6)? La respuesta es afirmativa en el caso $\kappa \geq 0$, pero para probarlo necesitamos una estimación inferior para W'' . Esto nos lleva a estudiar exhaustivamente la regularidad de las soluciones generales de la ecuación de los estallidos turbulentos en el caso $n = 1$, $\kappa \geq 0$. Éste es el objeto del capítulo V. El cambio de la variable temporal

$$(8) \quad d\tau = l(t)dt, \quad \tau(0) = 0,$$

nos permite considerar la ecuación

$$(9) \quad u_\tau = (u^m)_{xx} - \frac{\kappa u^m}{r^2(\tau)} \quad \text{si } (x, \tau) \in S = \mathbb{R} \times (0, \infty),$$

donde $r(\tau) = l(t)$ es la interfase expresada en términos del nuevo tiempo τ . Trabajaremos con esta ecuación. Los resultados se pueden traducir a la ecuación (1) utilizando la fórmula

$$dt = \frac{d\tau}{r(\tau)},$$

inversa de (8), para recuperar el tiempo original.

El principal resultado de este capítulo es la estimación de semiconvexidad

$$v_{xx} \geq -C/\tau \text{ como distribuciones pertenecientes a } \mathcal{D}'(S),$$

donde $v = mu^{m-1}/(m-1)$ es la variable presión. Una vez conseguida esta estimación es fácil obtener distintas propiedades de la frontera libre. Por ejemplo, probamos que la función $r(\tau)$ verifica la ecuación de la interfase,

$$D^+\zeta(\tau) = -v_x(\zeta(\tau), \tau),$$

y caracterizamos en términos exclusivamente del dato inicial cuándo el tiempo de espera, $\tau^* = \sup\{\tau \geq 0 : r(\tau) = r(0)\}$, es positivo. Vemos también que $r(\tau) \in C^1(t^*, \infty)$ y que $r'(\tau) > 0$ para $\tau > \tau^*$.

Para establecer estos resultados estudiamos la ecuación

$$u_t = (u^m)_{xx} - h(t)u^m$$

con $h(t)$ una función dada continua y no negativa. La ecuación (9) no es más que un caso particular de ésta con $h(t) = k/r^2(t)$. Las técnicas que empleamos son similares a las utilizadas por Herrero y Vázquez en [HV] al tratar el caso en que $h(t)$ es constante.

Así mismo, la estimación de semiconvexidad nos permite pasar al límite $m \downarrow 1$ en la variable presión correspondiente a soluciones generales del problema de Cauchy con dato inicial fijo. La presión satisface la ecuación

$$(10) \quad v_t = (m-1)vv_{xx} + v_x^2 - \frac{\kappa mv^2}{r^2(t)}.$$

En el límite obtenemos una solución de viscosidad de la ecuación de tipo Hamilton-Jacobi

$$(11) \quad v_t = v_x^2 - \frac{\kappa v^2}{r^2(t)},$$

ecuación que se obtiene haciendo formalmente $m = 1$ en (10). Dedicamos al estudio de este límite el capítulo VI. Como precedente tenemos el artículo de Aronson y Vázquez [AV1] donde se trata el caso sin absorción $\kappa = 0$.

Como ya dijimos, el capítulo VII está dedicado al estudio del caso límite $m = 1$ para las soluciones autosemejantes. Empezamos utilizando una vez más la estimación de semi-convexidad para probar que, dado $\kappa \geq 0$, las soluciones de (6) convergen a una función $W \in C^1([0, 1])$ que es solución de (7) para el valor γ que se obtiene al pasar al límite $m \downarrow 1$ en los exponentes de autosemejanza para $m > 1$. Este valor de γ resulta ser el único para el cual (7) tiene una solución clásica. Los resultados numéricos muestran que esta continuidad en m hasta $m = 1$ no está restringida a valores de κ positivos. Los fenómenos que se observan para $m > 1$ y $m = 1$ son los mismos. Esto nos lleva a estudiar los valores de γ para los cuales (7) tiene una solución clásica, y las propiedades de γ como función del parámetro κ . Probamos que $\gamma(\kappa)$ es una función continua e inyectiva definida para $\kappa > -\pi^2$ con rango \mathbb{R} . No hay soluciones clásicas de (7) para $\kappa \leq -\pi^2$ con γ finito. Sí hay, no obstante, soluciones con $\gamma = -\infty$. Daremos estas soluciones explícitamente.

Las soluciones clásicas de (7) corresponden a soluciones autosemejantes de (11). Como era de esperar, hay distintos tipos de autosemejanza. Las soluciones de (7) con $\gamma > -1$ corresponden a soluciones autosemejantes con crecimiento (si $\gamma < 0$) o decaimiento (si $\gamma \geq 0$) potencial. las soluciones con $-\infty < \gamma < -1$ a soluciones autosemejantes con explosión global en tiempo finito, y la solución con $\gamma = -1$ a soluciones autosemejantes con crecimiento exponencial. Finalmente, las soluciones con $\gamma = -\infty$ corresponden a soluciones con soporte fijo y explosión regional en dicho soporte en tiempo finito. Estas soluciones presentan dos longitudes típicas: el tamaño del soporte y el tamaño de la región donde la solución es plana. Este comportamiento con dos longitudes típicas es el que parece observarse asintóticamente para soluciones generales con $m > 1$ y $\kappa < -\pi^2$.

Los resultados correspondientes al capítulo II y los del capítulo III, salvo el teorema III.1.1, han sido publicados en [QV1]. Dicho teorema, así como los resultados del capítulo IV, fueron anunciados en [QV2], donde sólo se daba una idea de las pruebas. Los restantes resultados aún están pendientes de publicación.

CAPÍTULO II

SOLUCIONES AUTOSEMEJANTES DE TIPO (T1) PARA $k \geq 0$

En este capítulo estudiamos la existencia de soluciones autosemejantes de la forma

$$(T1) \quad u(x, t) = t^{-\mu/(m-1)} f(\zeta), \quad \zeta = |x|t^{\mu-1},$$

para la ecuación de los estallidos turbulentos en el caso de absorción, $k \geq 0$.

Para simplificar la presentación dedicamos las secciones del 1 al 5 al análisis del problema unidimensional. En la sección 6 indicamos los cambios necesarios para tratar el caso $n > 1$.

1. El teorema principal en dimensión uno

Como ya se indicó en el capítulo I, al estudiar soluciones autosemejantes de la forma (T1) nos podemos restringir al caso en que el soporte en tiempo $t = 1$ es la bola de centro el origen y de radio 1, es decir, tomamos $l_0 = 1$. Por lo tanto, buscamos una solución $f = f(\zeta)$ del siguiente problema no lineal de autovalores:

$$\left. \begin{aligned} (1.1.a) \quad & (f^m)'' + (1 - \mu)\zeta f' + \frac{\mu}{m-1} f - k f^m = 0 & \text{si } 0 < \zeta < 1, \\ (1.1.b) \quad & f > 0 & \text{si } 0 \leq \zeta < 1, \\ (1.1.c) \quad & (f^m)'(0) = 0, \quad f(1) = 0 \text{ y } (f^m)'(1) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Como parte del problema tendremos que determinar los valores de μ para los cuales existe una solución. El caso en el que $l_0 \neq 1$ se recupera por medio de la fórmula

$$f_{l_0}(\zeta) = l_0^{1/(m-1)} f(\zeta/l_0).$$

Recientemente Hastings y Peletier [HP] han probado la existencia de soluciones para el problema (1.1) en el caso que aparece en el modelo físico, $m = 3/2$. El resultado es el siguiente:

Teorema, [HP]. Sea $m = 3/2$. Para cada $k \geq 0$ existe un único valor, $\mu(k)$, tal que el problema (1.1) tiene solución, que resulta ser única. El exponente μ es una función estrictamente creciente y continua de k cuyo rango es $[1/3, 1)$.

Mejoramos este resultado en el siguiente teorema:

Teorema 1.1. Sea $m > 1$. Para cada $k \geq 0$ existe un único valor, $\mu(k)$, tal que el problema (1.1) tiene solución, que resulta ser única. El exponente μ es una función analítica de $k \in [0, \infty)$ y de $m > 1$. Los valores de $\mu(k)$ varían de $\mu(0) = (m-1)/m$ a $\mu(\infty) = 1$, siendo $\mu'(k) > 0$. La derivada en $k = 0$ viene dada por

$$\frac{d\mu}{dk}(0) = \frac{(m-1)^2}{m^2(3m-1)}.$$

La función f^{m-1} es una función analítica de $\zeta \in [0, 1]$, $k \in [0, \infty)$ y $m \in (1, \infty)$.

Prueba. A. UNICIDAD Y RANGO DE $\mu(k)$. Esta parte no ofrece ninguna novedad con respecto a los argumentos de [HP], quitando los cambios obvios necesarios para sustituir $m = 3/2$ por $m > 1$. Omitimos los detalles.

B. EXISTENCIA Y REGULARIDAD. Por conveniencia cambiamos la variable dependiente a la variable presión

$$w(\zeta) = \frac{m}{m-1} f^{m-1}(\zeta).$$

El problema (1.1) se convierte en el problema de encontrar una función w definida en $[0, 1]$ y una constante μ tales que

$$\left. \begin{aligned} (1.2.a) \quad & w'' + \frac{1}{m-1} \frac{w'}{w} H(\zeta) + \frac{\mu}{m-1} - \frac{m-1}{m} kw = 0 & \text{si } 0 < \zeta < 1, \\ (1.2.b) \quad & w > 0 & \text{si } 0 \leq \zeta < 1, \\ (1.2.c) \quad & w'(0) = 0, w(1) = 0 \text{ y } (w^{m/(m-1)})'(1) = 0, \end{aligned} \right\}$$

donde $H(\zeta) = w'(\zeta) + (1-\mu)\zeta$.

B.1. *Disparo desde el punto singular.* Estamos interesados en construir soluciones de (1.2) disparando hacia atrás desde la frontera $\zeta = 1$. Por consiguiente, es razonable hacer el cambio de variable independiente

$$s = 1 - \zeta,$$

de manera que disparemos desde $s = 0$. El problema se ha transformado en

$$(P_{k,\mu}) \quad \left\{ \begin{aligned} & w'' + \frac{1}{m-1} \frac{w'}{w} (w' + (1-\mu)(s-1)) + \frac{\mu}{m-1} - \frac{m-1}{m} kw = 0 & \text{si } 0 < s < 1, \\ & w > 0 & \text{si } 0 < s \leq 1, \\ & w(0) = 0, (w^{m/(m-1)})'(0) = 0 \text{ y } w'(1) = 0, \end{aligned} \right.$$

donde ahora $w = w(s)$. Probamos en primer lugar que se puede construir una solución analítica local $w = w(s; k, \mu)$ a partir de $s = 0$ para k y μ variables.

B.2. *Continuación para construir una rama solución.* Para obtener una solución de $(P_{k,\mu})$ todavía tenemos que mostrar que las soluciones locales se pueden continuar hasta $s = 1$ y que se puede cumplir la condición

$$\frac{\partial w}{\partial s}(1; k, \mu) = 0.$$

Mostraremos que esta ecuación, vista como una condición $F(k, \mu) = 0$ sobre las variables k y μ , define μ como una función implícita de k . Para poder utilizar el teorema de la función implícita necesitamos que F sea regular (al menos C^1). Es en este punto donde utilizamos la regularidad obtenida en el paso B.1. También necesitamos la condición de transversalidad

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} \neq 0.$$

La ejecución práctica de este segundo paso usa un *método de continuación* empezando a partir de la solución conocida para $k_0 = 0$ y $\mu_0 = (m-1)/m$. En efecto, como ya se observa en [B1] (para $m = 3/2$), para $k = 0$ la ecuación de los estallidos turbulentos se reduce a una ecuación de medios porosos cambiada de escala (véase [KV] para más detalles) y el problema $(P_{k,\mu})$ tiene una solución w_0 dada explícitamente por

$$w_0(s) = \frac{1}{2m} (1 - (1-s)^2)_+.$$

Definimos el conjunto Ω formado por los $\bar{k} \geq 0$ para los que existe una función analítica $\mu(k)$ definida para $k \in [0, \bar{k}]$ tal que $(P_{k,\mu(k)})$ admite una solución. En otras palabras, existe una rama analítica de soluciones en $[0, \bar{k}]$. Probaremos que:

- (i) Ω es no vacío, ya que $0 \in \Omega$;
- (ii) Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}_+ ;
- (iii) Ω es un subconjunto cerrado de \mathbb{R}_+ .

De ello se deduce que $\Omega = \mathbb{R}_+$, lo que demuestra el teorema. La parte más difícil de este programa es la parte (ii), que depende de manera esencial del teorema de la función implícita. La monotonía de $\mu(k)$ es un subproducto de dicho teorema. \square

2. Disparo desde la frontera libre

Empezamos la construcción de las soluciones disparando desde la frontera libre, situada, en la nueva variable s , en $s = 0$. Planteamos el problema

$$(P_{k,\mu}^*) \begin{cases} w'' + \frac{1}{m-1} \frac{w'}{w} (w' + (1-\mu)(s-1)) + \frac{\mu}{m-1} - \frac{m-1}{m} kw = 0 & \text{si } 0 < s < 1, \\ w > 0 & \text{si } 0 < s \leq 1, \\ w(0) = 0, (w^{m/(m-1)})'(0) = 0. \end{cases}$$

Este es el resultado local:

Lema 2.1. *Para cada $k \in \mathbb{R}$ y $\mu \in (-\infty, 1)$ existe una solución analítica local, $w(s; k, \mu)$, del problema $(P_{k,\mu}^*)$ definida en un entorno a la derecha de $s = 0$.*

Con esto queremos decir que, para todo (k^*, μ^*) verificando las hipótesis del lema, podemos encontrar un entorno V de (k^*, μ^*) en \mathbb{R}^2 y un $\varepsilon > 0$ tales que para todo $(k, \mu) \in V$

existe una solución del problema de valor inicial

$$\left. \begin{aligned} (2.1.a) \quad & w'' + \frac{1}{m-1} \frac{w'}{w} (w' + (1-\mu)(s-1)) + \frac{\mu}{m-1} - \frac{m-1}{m} kw = 0 \quad \text{si } 0 < s < \varepsilon, \\ (2.1.b) \quad & w > 0 \quad \text{si } 0 < s < \varepsilon, \\ (2.1.c) \quad & w(0) = 0, (w^{m/(m-1)})'(0) = 0, \end{aligned} \right\}$$

siendo $w = w(s; k, \mu)$ una función analítica en $[0, \varepsilon] \times V$.

Prueba. A. REFORMULACIÓN. Es conveniente cambiar la variable dependiente a

$$y(s) = \left(\frac{m-1}{m} w(s) \right)^{m/(m-1)} = f^m(s).$$

Así, el problema (2.1) se convierte en

$$\left\{ \begin{aligned} & y'' - \frac{(1-\mu)}{m} \frac{y'}{y^{(m-1)/m}} (1-s) + \frac{\mu}{m-1} y^{1/m} - ky = 0 \quad \text{si } 0 < s < \varepsilon, \\ & y > 0 \quad \text{si } 0 < s < \varepsilon, \\ & y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{aligned} \right.$$

Integrando en $(0, s)$ e imponiendo la condición inicial $y'(0) = 0$, obtenemos

$$y' = \frac{(1-\mu)}{m} \int_0^s \frac{y'}{y^{(m-1)/m}} (1-t) dt - \frac{\mu}{m-1} \int_0^s y^{1/m} dt + k \int_0^s y dt.$$

Integrando por partes,

$$\left\{ \begin{aligned} & y' = (1-\mu)(1-s)y^{1/m} + \left(1 - \frac{m\mu}{m-1} \right) \int_0^s y^{1/m} dt + k \int_0^s y dt, \\ & y(0) = 0. \end{aligned} \right.$$

Para eliminar el mal comportamiento en $s = 0$ introducimos la nueva variable dependiente ψ , que se define a través del cambio de variables

$$y = as^{m/(m-1)}(1+\psi),$$

donde a está dado por

$$a = ((1-\mu)(m-1)/m)^{m/(m-1)}.$$

Es fácil probar, repitiendo los argumentos del lema 2.1 de [HP], que, si w es solución del problema (2.1), entonces $w'(0^+) = (1-\mu)$. Esto implica que $\psi(0) = 0$. Por otra parte, ψ verifica la ecuación

$$\begin{aligned} \psi' &= \frac{m}{(m-1)s} (1+\psi)^{1/m} (1 - (1+\psi)^{(m-1)/m}) - \frac{m}{m-1} (1+\psi)^{1/m} \\ &+ \frac{(1 - \frac{m\mu}{m-1})}{a^{(m-1)/m} s^{m/(m-1)}} \int_0^s t^{1/(m-1)} (1+\psi)^{1/m} dt + \frac{k}{s^{m/(m-1)}} \int_0^s t^{m/(m-1)} (1+\psi) dt. \end{aligned}$$

Haciendo algunos cálculos más obtenemos

$$(\psi s)' = \psi A_\psi - \frac{m}{m-1} s(1+\psi)^{1/m} + \frac{(1 - \frac{m\mu}{m-1})}{a^{(m-1)/m} s^{1/(m-1)}} \int_0^s t^{1/(m-1)} (1+\psi)^{1/m} dt \\ + \frac{k}{s^{1/(m-1)}} \int_0^s t^{m/(m-1)} (1+\psi) dt,$$

donde

$$(2.2) \quad A_\psi(s) = 1 + \frac{m}{m-1} \frac{(1+\psi(s))^{1/m}}{\psi(s)} (1 - (1+\psi(s))^{(m-1)/m}).$$

Integrando una vez más llegamos finalmente a una ecuación integral para ψ ,

$$(2.3) \quad \psi = \frac{1}{s} \int_0^s \psi(t) A_\psi(t) dt - \frac{m}{(m-1)s} \int_0^s t(1+\psi(t))^{1/m} dt \\ + \frac{(1 - \frac{m\mu}{m-1})}{a^{(m-1)/m} s} \int_0^s \frac{1}{t^{1/(m-1)}} \int_0^t u^{1/(m-1)} (1+\psi(u))^{1/m} du dt \\ + \frac{k}{s} \int_0^s \frac{1}{t^{1/(m-1)}} \int_0^t u^{m/(m-1)} (1+\psi(u)) du dt,$$

donde hemos impuesto que $\psi(0) = 0$. Si existe una solución analítica, ψ , a este problema, la correspondiente w será una solución analítica del problema (2.1).

B. PUNTO FIJO. Para probar que existe una solución analítica real de (2.3) empezaremos por considerar ψ como una *función compleja* de las variables complejas s , k y μ . Probaremos, utilizando un teorema de punto fijo, que hay una única función holomorfa que resuelve este nuevo problema *complejo*. A partir de esta solución obtendremos una solución analítica real de (2.3).

Definimos un operador T , de la siguiente forma:

$$(T\psi)(s) = \frac{1}{s} \int_0^s \psi(t) A_\psi(t) dt - \frac{m}{(m-1)s} \int_0^s t(1+\psi(t))^{1/m} dt \\ + \frac{(1 - \frac{m\mu}{m-1})}{a^{(m-1)/m} s} \int_0^s \frac{1}{t^{1/(m-1)}} \int_0^t u^{1/(m-1)} (1+\psi(u))^{1/m} du dt \\ + \frac{k}{s} \int_0^s \frac{1}{t^{1/(m-1)}} \int_0^t u^{m/(m-1)} (1+\psi(u)) du dt.$$

Un punto fijo para este operador es una solución de la ecuación integral (2.3).

Para probar que existe un *único punto fijo holomorfo* de T utilizamos el principio de la aplicación contractiva. Para ello, escogemos el dominio K de T de tal manera que T aplique K en K contractivamente. Por supuesto, dado que estamos buscando una

solución holomorfa, K deberá contener solamente funciones holomorfas. Fijamos $\delta_1 > 0$, y $\delta_2 = (1 - \mu^*)/2$. Sea

$$\Lambda_\varepsilon = \{(s; k, \mu) \in \mathbb{C}^3 : (s; k, \mu) \in B_\varepsilon(0) \times B_{\delta_1}(k^*) \times B_{\delta_2}(\mu^*)\}$$

donde $B_d(\xi) = \{\xi' \in \mathbb{C} : |\xi' - \xi| < d\}$. Sea $K = K(C, \varepsilon)$ dado por

$$K(C, \varepsilon) = \{\psi \text{ holomorfa en } \Lambda_\varepsilon : |\psi(s; k, \mu)| \leq C|s| \text{ si } (s; k, \mu) \in \Lambda_\varepsilon\}.$$

Definimos una métrica en K mediante

$$d(\psi_1, \psi_2) = \sup_{\Lambda_\varepsilon} |\psi_1(s; k, \mu) - \psi_2(s; k, \mu)|.$$

Como consecuencia inmediata del teorema de Weierstrass para funciones holomorfas, tenemos que K dotado con esta métrica es completo. Obtendremos $C > 0$ y $\varepsilon > 0$ tales que $K(C, \varepsilon)$ sea invariante bajo la acción de T , y tales que T sea contractiva.

Observaciones. (i) En lo que sigue $\psi(s)$ designará a $\psi(s; k, \mu)$.

(ii) El conjunto K es no vacío, pues contiene la función constantemente igual a cero.

(iii) Si $\psi \in K$, entonces $\psi(0; k, \mu) = 0$, tal y como se necesita.

B.1. INVARIANCIA. En primer lugar obtenemos $C > 0$ y $\varepsilon > 0$ tales que, si $\psi \in K$, entonces $T\psi \in K$. Sea $(s; k, \mu) \in \Lambda_\varepsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} |T\psi(s)| &\leq \frac{1}{|s|} \left| \int_0^s \psi(t) A_\psi(t) dt \right| + \frac{m}{(m-1)|s|} \left| \int_0^s t(1 + \psi(t))^{1/m} dt \right| \\ &\quad + \frac{|1 - \frac{m\mu}{m-1}|}{|a|^{(m-1)/m}|s|} \left| \int_0^s \frac{1}{t^{1/(m-1)}} \int_0^t u^{1/(m-1)} (1 + \psi(u))^{1/m} du dt \right| \\ &\quad + \frac{|k|}{|s|} \left| \int_0^s \frac{1}{t^{1/(m-1)}} \int_0^t u^{m/(m-1)} (1 + \psi(u)) du dt \right|. \end{aligned}$$

Queremos que la suma de los diferentes términos del segundo miembro sea menor o igual que $C|s|$, por lo que acotaremos cada uno de ellos por $C|s|/4$.

Primer término. Tenemos la integral $\int_0^s \psi(t) A_\psi(t) dt$, que se puede evaluar a lo largo de cualquier camino Γ contenido en Λ_ε que una $(0; k, \mu)$ con $(s; k, \mu)$. Elegimos como tal camino la línea recta que une $(0; k, \mu)$ con $(s; k, \mu)$, que tiene una longitud $|s|$. Obtenemos

$$L_1 = \frac{1}{|s|} \left| \int_0^s \psi(t) A_\psi(t) dt \right| \leq \sup_{\Gamma} |\psi| \sup_{\Gamma} |A_\psi| < C\varepsilon \sup_{\Gamma} |A_\psi|.$$

Tomamos $C\varepsilon < 1/2$. Se sigue de (2.2) que, cuando $\psi \rightarrow 0$,

$$A_\psi = 1 + \frac{m}{m-1} \frac{(1 + o(1))}{\psi} \left(-\frac{m-1}{m} \psi + o(|\psi|) \right) = o(1).$$

Por consiguiente, existe un valor $\delta > 0$ tal que, si $|\psi| < \delta$, entonces $|A_\psi| < 1/4$. Tomando $\varepsilon < (\min(1/2, \delta))/C$ obtenemos que $\sup_\Gamma |A_\psi| < 1/4$ y, por tanto, $L_1 < C|s|/4$.

Segundo término.

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{m}{(m-1)|s|} \left| \int_0^s t(1 + \psi(t))^{1/m} dt \right| \leq \frac{m|s|}{(m-1)} \sup_\Gamma (1 + |\psi|)^{1/m} \\ &\leq \frac{m|s|}{m-1} (1 + C\varepsilon)^{1/m} < \frac{m|s|}{m-1} (1 + C\varepsilon). \end{aligned}$$

Queremos que L_2 sea menor que $C|s|/4$. Para ello basta tomar $C > 4m/(m-1)$ y entonces $\varepsilon = \varepsilon(m, C)$ suficientemente pequeño.

El tercer término se estima por

$$\begin{aligned} L_3 &= \frac{\rho}{|s|} \left| \int_0^s \frac{1}{t^{1/(m-1)}} \int_0^t u^{1/(m-1)} (1 + \psi(u))^{1/m} du dt \right| \\ &\leq \rho \sup_\Gamma \left| \frac{1}{t^{1/(m-1)}} \int_0^t u^{1/(m-1)} (1 + \psi(u))^{1/m} du \right| \leq \rho|s|(1 + C\varepsilon), \end{aligned}$$

donde

$$\rho = \left| 1 - \frac{m\mu}{m-1} \right| \frac{m}{(m-1)(1-\mu)}.$$

Para obtener $L_3 < C|s|/4$ empezamos imponiendo que $C = C(m, \mu^*, \delta_2)$ sea suficientemente grande como para que $C/4 > \rho$ y después tomamos $\varepsilon = \varepsilon(\mu^*, \delta_2, C)$ suficientemente pequeño.

El cuarto término se trata de forma parecida. De nuevo necesitamos C grande y después $\varepsilon = \varepsilon(C, m, \mu^*, k^*, \delta_1, \delta_2)$ pequeño.

Para C y ε cumpliendo todas las condiciones anteriores concluimos que, si $\psi \in K$, entonces $|T\psi(s; k, \mu)| \leq C|s|$ para todo $(s; k, \mu) \in \Lambda_\varepsilon$, es decir, $T\psi \in K$.

B.2. CONTRACTIVIDAD. Probamos a continuación que existe $L < 1$ tal que, si ψ_1 y ψ_2 pertenecen a K , entonces $d(T\psi_1, T\psi_2) < L d(\psi_1, \psi_2)$. En efecto,

$$\begin{aligned} |T\psi_1(s) - T\psi_2(s)| &\leq \frac{1}{|s|} \int_0^s |\psi_1(t)A_{\psi_1}(t) - \psi_2(t)A_{\psi_2}(t)| dt \\ &+ \frac{m}{(m-1)|s|} \int_0^s |t| |(1 + \psi_1(t))^{1/m} - (1 + \psi_2(t))^{1/m}| dt \\ &+ \frac{|1 - \frac{m\mu}{m-1}|}{|a|^{(m-1)/m}|s|} \int_0^s \frac{1}{|t|^{1/(m-1)}} \int_0^t |u|^{1/(m-1)} |(1 + \psi_1(u))^{1/m} - (1 + \psi_2(u))^{1/m}| du dt \\ &+ \frac{|k|}{|s|} \int_0^s \frac{1}{|t|^{1/(m-1)}} \int_0^t |u|^{m/(m-1)} |(1 + \psi_1(u)) - (1 + \psi_2(u))| du dt. \end{aligned}$$

Como antes, analizamos los distintos términos del segundo miembro por separado, acotando cada uno de ellos por $(\sup_{\Lambda_\epsilon} |\psi_1 - \psi_2|)/8$.

Primer término.

$$K_1 = \frac{1}{|s|} \int_0^s |\psi_1(t)A_{\psi_1}(t) - \psi_2(t)A_{\psi_2}(t)| dt \leq \sup_{\Gamma} |\psi_1(t)A_{\psi_1}(t) - \psi_2(t)A_{\psi_2}(t)|.$$

Pero

$$\begin{aligned} |\psi_1 A_{\psi_1} - \psi_2 A_{\psi_2}| &= |\psi_1 A_{\psi_1} - \psi_2 A_{\psi_1} + \psi_2 A_{\psi_1} - \psi_2 A_{\psi_2}| \\ &\leq |A_{\psi_1}| |\psi_1 - \psi_2| + |\psi_2| |A_{\psi_1} - A_{\psi_2}|. \end{aligned}$$

Tenemos

$$|A_{\psi_1} - A_{\psi_2}| \leq \sup_{\xi \in B_{1/2}} |\chi'(\xi)| |\psi_1 - \psi_2|,$$

donde χ es una función holomorfa para $|\xi| < 1$ dada por

$$\chi(\xi) = \frac{m}{m-1} \frac{(1+\xi)^{1/m}}{\xi} (1 - (1+\xi)^{(m-1)/m}).$$

Por consiguiente, $|A_{\psi_1} - A_{\psi_2}| \leq M |\psi_1 - \psi_2|$, donde $M = \max_{\bar{B}_{1/2}} |\chi'(\xi)|$. Así pues,

$$\sup_{\Lambda_\epsilon} |\psi_1 A_{\psi_1} - \psi_2 A_{\psi_2}| \leq \left(\sup_{\Lambda_\epsilon} |A_{\psi_1}| + M \sup_{\Lambda_\epsilon} |\psi_2| \right) \sup_{\Lambda_\epsilon} |\psi_1 - \psi_2|.$$

Por otra parte, por ser $A_\psi = o(1)$, existe $\bar{\delta}$ tal que, si $|\psi| < \bar{\delta}$, entonces $|A_\psi| < 1/16$. Por lo tanto, si tomamos $C\epsilon < \min(1/2, \bar{\delta}, 1/16M)$, concluimos que

$$K_1 < \frac{1}{8} \sup_{\Lambda_\epsilon} |\psi_1 - \psi_2|.$$

Segundo término.

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{m}{(m-1)|s|} \int_0^s |t| |(1 + \psi_1(t))^{1/m} - (1 + \psi_2(t))^{1/m}| dt \\ &\leq \frac{m|s|}{m-1} \sup_{\Gamma} |(1 + \psi_1(s))^{1/m} - (1 + \psi_2(s))^{1/m}|. \end{aligned}$$

Utilizando de nuevo el teorema del valor medio y tomando $\epsilon < (m-1)/16$ llegamos a

$$K_2 \leq \frac{2\epsilon}{m-1} \sup_{\Gamma} |\psi_1 - \psi_2| < \frac{1}{8} \sup_{\Lambda_\epsilon} |\psi_1 - \psi_2|.$$

Los términos tercero y cuarto se estiman de la misma forma.

Por consiguiente, si ε es suficientemente pequeño,

$$|(T\psi_1 - T\psi_2)(x)| < \frac{1}{2} \sup_{\Lambda_\varepsilon} |\psi_1 - \psi_2|,$$

de manera que

$$d(T\psi_1, T\psi_2) \leq \frac{1}{2} d(\psi_1, \psi_2).$$

C. CONCLUSIÓN. Si tomamos $C = C(m, \mu^*, \delta_2)$ suficientemente grande y, una vez fijado un C tal, tomamos ε suficientemente pequeño, entonces T es una aplicación estrictamente contractiva de K en K . Esto implica que existe una única función holomorfa ψ solución de la ecuación integral (2.3). Sea

$$\psi = \sum_{n,j,l=0}^{\infty} a_{njl} s^n (k - k^*)^j (\mu - \mu^*)^l$$

el desarrollo en serie de potencias de ψ cerca de $(0; k^*, \mu^*)$. No es difícil ver que la función holomorfa

$$W(s; k, \mu) \equiv \overline{\psi(\bar{s}, \bar{k}, \bar{\mu})} = \sum_{n,j,l=0}^{\infty} \overline{a_{njl}} s^n (k - k^*)^j (\mu - \mu^*)^l$$

es también solución de (2.3). Como hay una única solución holomorfa de dicho problema, deducimos que $a_{njl} = \overline{a_{njl}}$, y los coeficientes son, por tanto, reales. Por consiguiente, la restricción de ψ a s, k y μ reales es una solución analítica real del problema real (2.3), lo que completa la prueba. Obsérvese que $w(s; k, \mu)$ es una función analítica de s, k y μ . El entorno V viene dado por $B_{\delta_1}(k^*) \times B_{\delta_2}(\mu^*)$. \square

Lema 2.2. Sean $k^* \in \mathbb{R}$ y $\mu^* \in (-\infty, 1)$ tales que hay una solución del problema (P_{k^*, μ^*}) . Existe entonces un entorno \hat{V} de (k^*, μ^*) en \mathbb{R}^2 tal que, para todo $(k, \mu) \in \hat{V}$, las correspondientes soluciones locales obtenidas en el lema 2.1 se pueden prolongar hasta alcanzar $s = 1$ manteniendo la dependencia analítica de s, k y μ .

Prueba. Se sigue de un argumento de continuación sencillo. Haciendo $w_1 \equiv w$, $w_2 \equiv w'$, la ecuación (2.1.a) se transforma en el sistema de primer orden

$$\begin{cases} w_1' = w_2, \\ w_2' = -\frac{1}{m-1} \frac{w_2}{w_1} (w_2 + (1-\mu)(s-1)) - \frac{\mu}{m-1} + \frac{m-1}{m} k w_1. \end{cases}$$

Lo escribimos en forma condensada como $W' = G(s; W, k, \mu)$, donde $W = (w_1, w_2)$ y G tiene el significado obvio.

El lema 2.1 garantiza la existencia de un entorno V de (k^*, μ^*) y de un $\varepsilon > 0$ tales que existe una función $w(s; k, \mu)$, analítica en $[0, \varepsilon] \times V$, solución de (2.1). Sea c un número

tal que $0 < c < \varepsilon$. Sabemos que para $(k, \mu) = (k^*, \mu^*)$ existe una solución $W(s; k^*, \mu^*)$ del problema

$$(2.4) \quad \begin{cases} W' = G(s; W, k, \mu), \\ W(c) = (w(c; k, \mu), w'(c; k, \mu)), \end{cases}$$

en el intervalo $[0, 1]$. En consecuencia, (ver, por ejemplo, el teorema 4.3, capítulo 2 de [CL]) existe un $\delta > 0$ tal que, para cualquier (k, μ) que satisfaga

$$|W(c; k, \mu) - W(c; k^*, \mu^*)| + |(k, \mu) - (k^*, \mu^*)| < \delta,$$

hay una solución al problema (2.4) en $[c, 1]$. Ahora bien, dado que $w(c; k, \mu)$ depende analíticamente de k y μ , existe un valor $\hat{\delta}$ tal que, si $|(k, \mu) - (k^*, \mu^*)| < \hat{\delta}$, entonces

$$|(w(c; k, \mu), w'(c; k, \mu)) - (w(c; k^*, \mu^*), w'(c; k^*, \mu^*))| < \frac{\delta}{2}.$$

Por tanto, si $(k, \mu) \in V$ es tal que $|(k, \mu) - (k^*, \mu^*)| < \min(\delta/2, \hat{\delta})$, existe una solución de (2.4). Además, G depende analíticamente de sus argumentos mientras que W exista, y el dato inicial depende analíticamente de k y μ . Por consiguiente W depende analíticamente de s , k , y μ . Esta solución prolonga la obtenida en el lema 2.1 hasta $s = 1$. \square

3. Transversalidad y monotonía

Gracias a los lemas 2.1 y 2.2, podemos definir una función

$$F(k, \mu) \equiv \frac{\partial w}{\partial s}(1; k, \mu)$$

en un entorno de cada par (k^*, μ^*) para el cual exista una solución del problema (P_{k^*, μ^*}) . En esta sección probaremos que

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}(k^*, \mu^*) \neq 0.$$

Podemos, por tanto, aplicar el teorema de la función implícita y definir una función $\mu(k)$ en un entorno de k^* a través de la condición $F(k, \mu(k)) = 0$. Como subproducto obtendremos también la monotonía de μ como función de k .

Lema 3.1. *Supongamos que para (k^*, μ^*) hay una solución $w(s; k^*, \mu^*)$ del problema (P_{k^*, μ^*}) . Entonces*

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}(k^*, \mu^*) < 0 \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial k}(k^*, \mu^*) > 0.$$

Prueba. Usamos los siguientes resultados, que son una generalización para $m > 1$ de los lemas 2.1 y 4.1 de [HP], y cuyas pruebas son esencialmente las mismas:

$$(3.1) \quad w'(0; k, \mu) = (1 - \mu).$$

$$(3.2) \quad w''(0; k, \mu) = -\frac{1}{m},$$

$$(3.3) \quad w'''(0; k, \mu) = -\frac{m\mu - (m-1)}{(2m-1)m^2(1-\mu)} + \frac{2(m-1)^2(1-\mu)k}{(2m-1)m}.$$

Nótese que en [HP] w es función de ζ , mientras que aquí es función de $s = 1 - \zeta$.

Sea k tal que $k > k^*$. Por (3.1)–(3.3) sabemos que

$$\begin{aligned} w'(0; k^*, \mu^*) &= w'(0; k, \mu^*) > 0, \\ w''(0; k^*, \mu^*) &= w''(0; k, \mu^*) < 0, \\ w'''(0; k^*, \mu^*) &< w'''(0; k, \mu^*). \end{aligned}$$

Por consiguiente, hay un intervalo $(0, \delta)$ a la derecha de $s = 0$ donde se satisfacen las siguientes desigualdades:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} w''(s; k^*, \mu^*) &< w''(s; k, \mu^*) < 0, \\ w'(s; k^*, \mu^*) &< w'(s; k, \mu^*), \\ w(s; k^*, \mu^*) &< w(s; k, \mu^*). \end{aligned}$$

Repitiendo la demostración del lema 5.2 de [HP] (con los cambios obvios para sustituir $m = 3/2$ por un $m > 1$ general) se prueba que estas desigualdades son de hecho ciertas en todo el intervalo $(0, 1)$. Dicho lema se refiere al caso particular en que tanto $w(s; k^*, \mu^*)$ como $w(s; k, \mu^*)$ satisfacen la condición de derivada igual a 0 en $s = 1$. Sin embargo, una inspección cuidadosa de la demostración prueba que sigue siendo válida aunque $w(s; k, \mu^*)$ no verifique dicha condición.

Como consecuencia de las desigualdades (3.4), se tiene que

$$\frac{\partial w}{\partial k}(s; k^*, \mu^*) \geq 0, \quad \frac{\partial w'}{\partial k}(s; k^*, \mu^*) \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial w''}{\partial k}(s; k^*, \mu^*) \geq 0.$$

La última desigualdad se puede reescribir como

$$(3.5) \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w'}{\partial k} \right) (s; k^*, \mu^*) \geq 0.$$

Por otra parte, usando las ecuaciones (3.1)–(3.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'}{\partial k}(0; k^*, \mu^*) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w'}{\partial k} \right) (0; k^*, \mu^*) &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial w'}{\partial k} \right) (0; k^*, \mu^*) &= \frac{2(m-1)^2(1-\mu)}{(2m-1)m} > 0. \end{aligned}$$

Así, $\frac{\partial w'}{\partial k}(s; k^*, \mu^*) > 0$ en un entorno a la derecha de $s = 0$ y, por (3.5), en todo $(0, 1]$.
En particular

$$\frac{\partial^2 w}{\partial k \partial s}(1; k^*, \mu^*) > 0.$$

De manera análoga se prueba que

$$\frac{\partial w}{\partial \mu}(s; k^*, \mu^*) \leq 0, \quad \frac{\partial w'}{\partial \mu}(s; k^*, \mu^*) \leq 0 \quad y \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w'}{\partial \mu} \right)(s; k^*, \mu^*) \leq 0.$$

Por (3.1), $\frac{\partial w'}{\partial \mu}(0; k^*, \mu^*) = -1$. Por consiguiente, $\frac{\partial w'}{\partial \mu}(s; k^*, \mu^*) \leq -1$, y en particular

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \mu \partial s}(1; k^*, \mu^*) < 0,$$

lo que concluye el lema. \square

Corolario 3.2. *Para cada k para el cual $\mu(k)$ está definido tenemos que $\mu'(k) > 0$.*

Prueba. Se deriva implícitamente y se aplica el lema 3.1. \square

4. Construcción de la rama de soluciones

Para completar la prueba del teorema sólo falta probar que el conjunto Ω de los valores de $\bar{k} \geq 0$ para los que existe una función analítica $\mu(k)$ definida para $k \in [0, \bar{k}]$ tal que $(P_{k, \mu(k)})$ admite una solución, es simultáneamente abierto y cerrado. Esto es lo que hacemos en esta sección.

A. Ω ES ABIERTO. Supongamos que $k_0 \in \Omega$. Queremos probar que existe un valor $\delta > 0$ tal que $(k_0 - \delta, k_0 + \delta) \subset \Omega$. Para ello basta con probar que existe un entorno U de k_0 tal que para cada $k \in U$ existe un valor $\mu = \mu(k)$ para el cual hay una solución del problema $(P_{k, \mu})$.

Empezamos considerando el problema $(P_{k, \mu}^*)$. Una solución $w(s; k, \mu)$ de este problema será solución del problema $P_{k, \mu}$ si y sólo si

$$\frac{\partial w}{\partial s}(1; k, \mu) = 0.$$

Sabemos que para $(k_0, \mu(k_0))$ existe una solución del problema $(P_{k_0, \mu(k_0)})$. Por el lema 2.2 existe un entorno \hat{V} de $(k_0, \mu(k_0))$ en \mathbb{R}^2 tal que para todo $(k, \mu) \in \hat{V}$ existe una solución analítica, $w(s; k, \mu)$, del problema $(P_{k, \mu}^*)$. Esta solución depende analíticamente de los

parámetros k y μ . Así pues, como ya se mencionó en la sección 3, podemos definir una función $F : \widehat{V} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$F(k, \mu) = \frac{\partial w}{\partial s}(1; k, \mu).$$

Nótese que, debido a la analiticidad de w en s , k y μ , F resulta ser analítica.

Si $F(k, \mu) = 0$, entonces $w(s; k, \mu)$ es solución del problema $(P_{k, \mu})$. La cuestión es ahora: ¿define $F(k, \mu) = 0$ a μ como función implícita de k en un entorno de $(k_0, \mu(k_0))$? La respuesta es afirmativa ya que, como se prueba en el lema 3.1, se cumple la necesaria condición de transversalidad. Es más, como F es analítica μ es analítica.

B. Ω ES CERRADO. Para demostrarlo basta con encontrar la estimación adecuada. Consideramos una sucesión $\{k_n\}_{n \geq 0}$ con $k_n \in \Omega$, y tal que $k_n \rightarrow k_\infty$. Queremos ver que $k_\infty \in \Omega$. Para ello es suficiente con probar que para $k = k_\infty$ existe un valor μ_∞ tal que el problema $(P_{k_\infty, \mu_\infty})$ tiene solución. Sea la sucesión $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$, donde $\mu_n = \mu(k_n)$, y sea $\{w_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de las correspondientes soluciones. No es difícil probar (ver, por ejemplo, la sección 6 de [HP]) que $\{\mu_n\}$ converge a un cierto valor μ_∞ y que $\{w_n\}$ converge a una cierta función w_∞ . Es inmediato ver que w_∞ es solución del problema $(P_{k_\infty, \mu_\infty})$, ya que la convergencia, tanto de $\{w_n\}$ como de $\{w'_n\}$ y $\{w''_n\}$, es uniforme. La única precaución que debemos tomar es asegurarnos de que w_∞ no degenera haciéndose 0. Pero esto sólo sucede si μ_∞ se hace igual a 1, algo que no pasa para k_∞ finito. Para comprobar esta última afirmación necesitamos el siguiente lema:

Lema 4.1. *Sea $w(\zeta)$ una solución de (1.2) con $k \geq 0$. Entonces $w'(\zeta) < 0$ para todo $0 < \zeta < 1$.*

Prueba. Como ya se ha dicho, en el caso $k = 0$ la ecuación de los estallidos turbulentos se reduce a una ecuación de medios porosos cambiada de escala, y el problema (1.2) tiene solución sólo si $\mu = (m - 1)/m$. Dicha solución (que no es más que la solución de Barenblatt cambiada de escala) viene dada por $w = (1 - \zeta^2)/(2m)$. La monotonía es trivial. Consideramos, por tanto, $k > 0$. Por (1.2.a), en un punto crítico de w , donde $w' = 0$, se tiene que

$$(4.1) \quad \text{sign}(w'') = \text{sign} \left(\frac{m-1}{m} kw - \frac{\mu}{m-1} \right).$$

Supongamos que $w' \geq 0$ en algún punto de $(0, 1)$. Entonces w tiene un punto crítico $\zeta_1 \in (0, 1)$ que es un punto de máximo local. Sea ζ_0 el primer punto a la izquierda de ζ_1 donde $w' = 0$. Teniendo en cuenta (4.1) obtenemos que

$$w(\zeta_0) \geq \frac{m\mu}{k(m-1)^2} \quad \text{y} \quad w(\zeta_1) \leq \frac{m\mu}{k(m-1)^2}.$$

Esto contradice al hecho de que $w(\zeta_0) < w(\zeta_1)$. \square

Integrando la ecuación (1.2.a) después de multiplicarla por $w^{1/(m-1)}$ vemos que las soluciones verifican que

$$\begin{aligned} \left(\frac{m\mu}{m-1} - 1 \right) \int_0^1 w^{1/(m-1)} d\zeta &= \frac{(m-1)k}{m} \int_0^1 w^{m/(m-1)} d\zeta \\ &\leq \frac{(m-1)k}{m} w(0) \int_0^1 w^{1/(m-1)} d\zeta, \end{aligned}$$

donde la desigualdad es consecuencia de la monotonía de w . Dividiendo por $\int_0^1 w^{1/(m-1)} d\zeta$ que, si w es solución de (1.2), es distinto de 0, tenemos

$$(4.2) \quad \left(\frac{m\mu}{m-1} - 1 \right) \leq \frac{(m-1)k}{m} w(0).$$

Si $\mu_\infty = 1$ con k_∞ finito, entonces pasando al límite en esta desigualdad tenemos

$$w_\infty(0)k_\infty \geq \frac{m}{(m-1)^2}.$$

En consecuencia, w_∞ no es idénticamente nula.

5. Fórmulas explícitas

En esta sección calculamos la derivada de $\mu(k)$ en $k = 0$. El valor obtenido coincide, cuando $m = 3/2$, con el valor obtenido formalmente por Chen y Goldenfeld en [CG].

Lema 5.1. *Tenemos*

$$(5.1) \quad \frac{d\mu}{dk}(0) = \frac{(m-1)^2}{m^2(3m-1)}.$$

Prueba. Recordando que $\mu(0) = (m-1)/m$ y derivando implícitamente obtenemos

$$\frac{d\mu}{dk}(0) = - \frac{\partial F}{\partial k} \bigg/ \frac{\partial F}{\partial \mu},$$

donde las derivadas parciales de F se evalúan en $(0, (m-1)/m)$. Multiplicando (2.1.a) por $w^{1/(m-1)}$, agrupando términos, integrando en $(0, s)$ e imponiendo las condiciones en $s = 0$ llegamos a

$$\begin{aligned} w'(s) &= (1-\mu)(1-s) + \left(1 - \frac{m\mu}{m-1} \right) \frac{1}{w^{1/(m-1)}(s)} \int_0^s w^{1/(m-1)}(t) dt \\ &\quad + \frac{(m-1)k}{mw^{1/(m-1)}(s)} \int_0^s w^{m/(m-1)}(t) dt, \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}
F(k, \mu) &= \left(1 - \frac{m\mu}{m-1}\right) \frac{\int_0^1 w^{1/(m-1)}(t; k, \mu) dt}{w^{1/(m-1)}(1; k, \mu)} + \frac{(m-1)k}{m} \frac{\int_0^1 w^{m/(m-1)}(t; k, \mu) dt}{w^{1/(m-1)}(1; k, \mu)}, \\
\frac{\partial F}{\partial k}(k, \mu) &= \left(1 - \frac{m\mu}{m-1}\right) \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\int_0^1 w^{1/(m-1)}(t; k, \mu) dt}{w^{1/(m-1)}(1; k, \mu)} \right) + \frac{m-1}{m} \frac{\int_0^1 w^{m/(m-1)}(t; k, \mu) dt}{w^{1/(m-1)}(1; k, \mu)} \\
&\quad + \frac{(m-1)k}{m} \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\int_0^1 w^{m/(m-1)}(t; k, \mu) dt}{w^{1/(m-1)}(1; k, \mu)} \right), \\
\frac{\partial F}{\partial \mu}(k, \mu) &= -\frac{m}{m-1} \frac{\int_0^1 w^{1/(m-1)}(t; k, \mu) dt}{w^{1/(m-1)}(1; k, \mu)} + \left(1 - \frac{m\mu}{m-1}\right) \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\int_0^1 w^{1/(m-1)}(t; k, \mu) dt}{w^{1/(m-1)}(1; k, \mu)} \right) \\
&\quad + \frac{(m-1)k}{m} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\int_0^1 w^{m/(m-1)}(t; k, \mu) dt}{w^{1/(m-1)}(1; k, \mu)} \right).
\end{aligned}$$

Así pues.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial k}(0, (m-1)/m) &= \frac{m-1}{m} \frac{\int_0^1 w^{m/(m-1)}(t; 0, (m-1)/m) dt}{w^{1/(m-1)}(1; 0, (m-1)/m)}, \\
\frac{\partial F}{\partial \mu}(0, (m-1)/m) &= -\frac{m}{m-1} \frac{\int_0^1 w^{1/(m-1)}(t; 0, (m-1)/m) dt}{w^{1/(m-1)}(1; 0, (m-1)/m)}.
\end{aligned}$$

Utilizando que $w(t; 0, (m-1)/m) = (1 - (1-t)^2)/2m$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu}{dk}(0) &= \frac{(m-1)^2}{m^3} \frac{\int_0^1 (1 - (1-t)^2)^{m/(m-1)} dt}{\int_0^1 (1 - (1-t)^2)^{1/(m-1)} dt} \\
&= \frac{(m-1)^2}{m^3} \frac{\int_0^1 (1-u)^{m/(m-1)} u^{-1/2} du}{\int_0^1 (1-u)^{1/(m-1)} u^{-1/2} du} \\
&= \frac{(m-1)^2}{m^3} \frac{B(1/2, 1 + m/(m-1))}{B(1/2, m/(m-1))},
\end{aligned}$$

donde $B(p, q)$ es la función beta. Puesto que $B(p, 1+q) = (q/(p+q)) B(p, q)$, se obtiene finalmente (5.1). \square

6. El resultado en varias dimensiones

En esta sección extendemos los resultados anteriores para incluir dimensiones mayores que uno. En este caso general buscamos una solución $f = f(\zeta)$ del siguiente problema no lineal de autovalores:

$$(6.1) \quad \begin{cases} (f^m)'' + \frac{n-1}{\zeta} (f^m)' + (1-\mu)\zeta f' + \frac{\mu}{m-1} f - kf^m = 0 & \text{si } 0 < \zeta < 1, \\ f > 0 & \text{si } 0 \leq \zeta < 1, \\ (f^m)'(0) = 0, f(1) = 0 \text{ y } (f^m)'(1) = 0. \end{cases}$$

Este problema, después del cambio de variable

$$w(\zeta) = \frac{m}{m-1} f^{m-1}(\zeta),$$

se convierte en el problema de encontrar una función w definida en $[0, 1]$ y una constante μ tales que

$$(P_{k,\mu}^n) \quad \begin{cases} w'' + \frac{n-1}{\zeta} w' + \frac{1}{m-1} \frac{w'}{w} H(\zeta) + \frac{\mu}{m-1} - \frac{m-1}{m} kw = 0 & \text{si } 0 < \zeta < 1, \\ w > 0 & \text{si } 0 \leq \zeta < 1, \\ w'(0) = 0, w(1) = 0, \text{ y } (w^{m/(m-1)})'(1) = 0, \end{cases}$$

donde $H(\zeta) = w'(\zeta) + (1 - \mu)\zeta$. Queremos emplear la misma técnica de disparo que en las secciones anteriores. El disparo desde el punto singular $\zeta = 1$ no ofrece ningún problema, ya que el término extra, $(n-1)w'/\zeta$, no es singular en dicho punto. Sin embargo, sí es singular en $\zeta = 0$, y no podemos, en general, extender las soluciones locales hasta alcanzar el origen, incluso aunque los parámetros (k, μ) estén próximos a valores específicos (k^*, μ^*) para los cuales haya una solución. Es necesario hacer una pequeña modificación del método que consiste en disparar tanto desde $\zeta = 0$ como desde $\zeta = 1$, y conectar las soluciones así obtenidas en un punto próximo a $\zeta = 0$. Precisemos estas ideas.

Teorema 6.1. Sean $m > 1$ y $n \geq 1$. Para cada $k \geq 0$ existe un único valor, $\mu(k)$, tal que el problema (6.1) tiene solución, que resulta ser única. El exponente de autosemejanza μ es una función analítica de $k \in [0, \infty)$, $m > 1$ y $n \geq 1$. Los valores de $\mu(k)$ varían desde $\mu(0) = n(m-1)/(n(m-1)+1)$ hasta $\mu(\infty) = 1$, siendo $\mu'(k) > 0$. La derivada en $k = 0$ vale

$$(6.2) \quad \frac{d\mu}{dk}(0) = \frac{(m-1)^2}{(n(m-1)+1)^2(n(m-1)+2m)}.$$

La función $f^{m-1}(\zeta)$ es cóncava y estrictamente decreciente en el intervalo $[0, 1]$. Depende analíticamente de $\zeta \in [0, 1]$, $k \in [0, \infty)$, $m > 1$ y $n \geq 1$.

Prueba. A. UNICIDAD. No presenta ninguna diferencia esencial con respecto al caso unidimensional.

B. DISPARO DESDE $\zeta = 0$. Dado que $\zeta = 0$ es un punto singular regular, hay una solución analítica local del problema

$$(\tilde{P}_{k,\mu,\gamma}) \quad \begin{cases} w'' + \frac{n-1}{\zeta} w' + \frac{1}{m-1} \frac{w'}{w} H + \frac{\mu}{m-1} - \frac{m-1}{m} kw = 0 & \text{si } 0 < \zeta < \bar{\varepsilon}, \\ w > 0 & \text{si } 0 < \zeta < \bar{\varepsilon}, \\ w(0) = \gamma, w'(0) = 0, \end{cases}$$

en un entorno $(0, \bar{\varepsilon})$ a la derecha de $\zeta = 0$, que se obtiene disparando con parámetros k , μ , y $\gamma = w(0)$. Esta solución depende analíticamente de ζ , k , μ y γ .

C. DISPARO DESDE $\zeta = 1$. El término extra $(n-1)w'/\zeta$ es regular cerca de $\zeta = 1$. Por tanto, tomando en cuenta los resultado de la sección 2, podemos afirmar que existe una solución analítica local del problema

$$(\hat{P}_{k,\mu}) \quad \begin{cases} w'' + \frac{n-1}{\zeta} w' + \frac{1}{m-1} \frac{w'}{w} H + \frac{\mu}{m-1} - \frac{m-1}{m} kw = 0 & \text{si } 1 - \hat{\varepsilon} < \zeta < 1, \\ w > 0 & \text{si } 1 - \hat{\varepsilon} < \zeta < 1, \\ w(1) = 0, (w^{m/(m-1)})'(1) = 0, \end{cases}$$

en un entorno $(1 - \hat{\varepsilon}, 1)$ a la izquierda de $\zeta = 1$. Esta solución depende analíticamente de ζ , k y μ .

D. CONTINUACIÓN DE LAS SOLUCIONES LOCALES. Sean $k^* \in \mathbb{R}$ y $\mu^* \in (-\infty, 1)$ tales que existe una solución del problema (P_{k^*, μ^*}^n) . Sea $\gamma^* \in (0, \infty)$ el valor en $\zeta = 0$ de dicha solución. Entonces, dado un punto intermedio c tal que $0 < c < 1$, existe un entorno V de (k^*, μ^*, γ^*) en \mathbb{R}^3 tal que, para todo $(k, \mu, \gamma) \in V$ la correspondiente solución local en $\zeta = 0$, $\tilde{w}(\zeta; k, \mu, \gamma)$, se puede prolongar hacia la derecha hasta alcanzar $\zeta = c$, y la correspondiente solución local en $\zeta = 1$, $\hat{w}(\zeta; k, \mu)$, se puede prolongar hacia la izquierda hasta alcanzar el mismo punto $\zeta = c$. Tanto \tilde{w} como \hat{w} mantienen la dependencia analítica de sus argumentos. La prueba es análoga a la del lema 2.2.

E. CONEXIÓN EN UN PUNTO INTERMEDIO. Para obtener una solución mediante la conexión de las dos ramas en un punto intermedio c , será necesario que se cumplan las condiciones

$$(6.3) \quad \begin{aligned} F_1(k, \mu, \gamma) &\equiv \tilde{w}(c; k, \mu, \gamma) - \hat{w}(c; k, \mu) = 0, \\ F_2(k, \mu, \gamma) &\equiv \tilde{w}'(c; k, \mu, \gamma) - \hat{w}'(c; k, \mu) = 0, \end{aligned}$$

que dicen que la conexión es C^1 . Si se produce una conexión de este tipo, por ser \tilde{w} y \hat{w} soluciones de la ecuación en un entorno de $\zeta = c$, tendremos que la conexión es analítica.

Podemos intentar aplicar el teorema de la función implícita en un entorno de valores $k = k^*$, $\mu = \mu^*$ y $\gamma = \gamma^*$, correspondientes a una solución. El teorema se podrá aplicar si el valor del determinante jacobiano

$$J \equiv \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(\mu, \gamma)} = \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \mu} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \mu} \right) \frac{\partial \tilde{w}'}{\partial \gamma} - \left(\frac{\partial \tilde{w}'}{\partial \mu} - \frac{\partial \hat{w}'}{\partial \mu} \right) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \gamma}$$

es distinto de cero. La analiticidad de \tilde{w} y \hat{w} proporcionará entonces la analiticidad de μ y γ como funciones de k . El determinante tiene que ser evaluado en el punto de intersección, $\zeta = c$, de las dos ramas, con $k = k^*$, $\mu = \mu^*$ y $\gamma = \gamma^*$. Podemos elegir el valor de c libremente, y lo haremos de tal forma que J no sea cero. Veamos que esto es posible. Para ello utilizaremos el siguiente resultado de monotonía:

Lema 6.2. Sea $\hat{w}(\zeta; k, \mu)$ una solución del problema $(\hat{P}_{k, \mu})$ que para $k = k^*$ y $\mu = \mu^*$ se extiende a una solución de (P_{k^*, μ^*}) . Entonces, para $0 \leq \zeta \leq 1$ tenemos

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \frac{\partial \hat{w}}{\partial \mu}(\zeta; k^*, \mu^*) \geq 0; \\ \text{(ii)} \quad & \frac{\partial \hat{w}'}{\partial \mu}(\zeta; k^*, \mu^*) \geq 1; \\ \text{(iii)} \quad & \frac{\partial \hat{w}''}{\partial \mu}(\zeta; k^*, \mu^*) \leq 0. \end{aligned}$$

Prueba. Es esencialmente la misma que la del lema 3.1. Se utilizan las siguientes fórmulas relativas a w_2 , que son una generalización inmediata de los lemas 2.1 y 4.1 de [HP]:

$$\begin{aligned} \hat{w}'(1; k, \mu) &= -(1 - \mu), \\ \hat{w}''(1; k, \mu) &= \frac{(n-1)(1-\mu)(m-1)}{m} - \frac{1}{m}, \\ \hat{w}'''(1; k, \mu) &= \frac{m\mu - (m-1)}{(2m-1)m^2(1-\mu)} - \frac{2(m-1)^2(1-\mu)k}{(2m-1)m}. \quad \square \end{aligned}$$

También usaremos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \mu}(0; k, \mu, \gamma) &= 0, & \frac{\partial \tilde{w}'}{\partial \mu}(0; k, \mu, \gamma) &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \gamma}(0; k, \mu, \gamma) &= 1, & \frac{\partial \tilde{w}'}{\partial \gamma}(0; k, \mu, \gamma) &= 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(\mu, \gamma)}(c; k^*, \mu^*, \gamma^*) &= \lim_{c \rightarrow 0} \left(-\frac{\partial \hat{w}}{\partial \mu} \frac{\partial \tilde{w}'}{\partial \gamma} + \frac{\partial \hat{w}'}{\partial \mu} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \gamma} \right)(c; k^*, \mu^*, \gamma^*) \\ &= \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\partial \hat{w}'}{\partial \mu} \left(-\left(\frac{\partial \hat{w}'}{\partial \mu} \right)^{-1} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \mu} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \tilde{w}'}{\partial \gamma} \right)(c; k^*, \mu^*, \gamma^*). \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\hat{w}(\zeta; k, \mu) = \int_1^\zeta \hat{w}'(t; k, \mu) dt.$$

Por tanto, utilizando la monotonía de $\frac{\partial \hat{w}'}{\partial \mu}$, que es una función decreciente de ζ , tenemos

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial \mu}(\zeta; k, \mu) = - \int_\zeta^1 \frac{\partial \hat{w}'}{\partial \mu}(t; k, \mu) dt \geq - \frac{\partial \hat{w}'}{\partial \mu}(\zeta; k, \mu)(1 - \zeta).$$

Así,

$$0 \leq -\frac{\partial \hat{w}}{\partial \mu} \bigg/ \frac{\partial \hat{w}'}{\partial \mu} \leq 1 - \zeta \leq 1,$$

y, por lo tanto,

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(\mu, \gamma)}(c; k^*, \mu^*, \gamma^*) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\partial \hat{w}'}{\partial \mu}(c; k^*, \mu^*, \gamma^*) \geq 1.$$

En consecuencia, tomando c suficientemente cerca de $\zeta = 0$ obtenemos la condición de transversalidad requerida.

F. CONSTRUCCIÓN DE LA RAMA DE SOLUCIONES. Nuestro método constructivo está basado en la continuación en el parámetro k , partiendo de la solución conocida para

$$k = 0, \quad \gamma = \frac{1}{2(n(m-1)+1)} \equiv \gamma_0, \quad \mu = \frac{n(m-1)}{n(m-1)+1} \equiv \mu_0.$$

Igual que en la sección 1. definimos el conjunto Ω formado por los valores $\bar{k} \geq 0$ tales que existe una función analítica $\mu(k)$ definida para $k \in [0, \bar{k}]$ tal que $(P_{k, \mu(k)})$ tiene solución. Utilizando las mismas ideas que en la sección 4, se prueba que Ω es un subconjunto de \mathbb{R}_+ abierto, cerrado y no vacío ($0 \in \Omega$). Se deduce que $\Omega = \mathbb{R}_+$.

G. MONOTONÍA Y CONCAVIDAD DE w . RANGO DE $\mu(k)$. Los argumentos son similares a los utilizados en las secciones 2 y 3 de [HP], salvo por el hecho de que en este caso hay que multiplicar las ecuaciones por $\zeta^{n-1} w^{1/(m-1)}$.

H. MONOTONÍA DE $\mu(k)$. Para cada k tal que $\mu(k)$ está definido tenemos que $\mu'(k) > 0$. En efecto,

$$\frac{d\mu}{dk}(k) = -\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(k, \gamma)} \bigg/ \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(\mu, \gamma)}.$$

Ya hemos visto que

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(\mu, \gamma)}(c; k, \mu(k), \gamma(k)) \geq 1 > 0.$$

Determinemos el signo de

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(k, \gamma)} = \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial k} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial k} \right) \frac{\partial \tilde{w}'}{\partial \gamma} - \left(\frac{\partial \tilde{w}'}{\partial k} - \frac{\partial \hat{w}'}{\partial k} \right) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \gamma}.$$

Necesitamos el siguiente resultado de monotonicidad:

Lema 6.3. Sea $\hat{w}(\zeta; k, \mu)$ una solución del problema $(\hat{P}_{k, \mu})$ que para $k = k^*$ y $\mu = \mu^*$ se extiende a una solución de (P_{k^*, μ^*}) . Entonces, para $0 \leq \zeta \leq 1$ tenemos

$$(i) \quad \frac{\partial \hat{w}}{\partial k}(\zeta; k^*, \mu^*) \geq 0;$$

$$(ii) \quad \frac{\partial \hat{w}'}{\partial k}(\zeta; k^*, \mu^*) \leq 0;$$

$$(iii) \quad \frac{\partial \hat{w}''}{\partial k}(\zeta; k^*, \mu^*) \geq 0.$$

Prueba. Esencialmente la misma que la del lema 3.1. \square

Tomando esto en cuenta junto con el hecho de que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial k}(0; k, \mu, \gamma) &= 0, & \frac{\partial \tilde{w}'}{\partial k}(0; k, \mu, \gamma) &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \gamma}(0; k, \mu, \gamma) &= 1, & \frac{\partial \tilde{w}'}{\partial \gamma}(0; k, \mu, \gamma) &= 0,\end{aligned}$$

llegamos a

$$\begin{aligned}\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(k, \gamma)}(c; k, \mu(k), \gamma(k)) &= \lim_{c \rightarrow 0} \left(-\frac{\partial \hat{w}}{\partial k} \frac{\partial \tilde{w}'}{\partial \gamma} + \frac{\partial \hat{w}'}{\partial k} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \gamma} \right)(c; k, \mu(k), \gamma(k)) \\ &= \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\partial \hat{w}'}{\partial k} \left(-\left(\frac{\partial \hat{w}'}{\partial k} \right)^{-1} \frac{\partial \hat{w}}{\partial k} \frac{\partial \tilde{w}'}{\partial \gamma} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \gamma} \right)(c; k, \mu(k), \gamma(k)).\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la monotonía de $\frac{\partial \hat{w}'}{\partial k}$, que es una función creciente de ζ , obtenemos

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial k}(\zeta; k, \mu) = - \int_{\zeta}^1 \frac{\partial \hat{w}'}{\partial k}(t; k, \mu) dt \leq - \frac{\partial \hat{w}'}{\partial k}(\zeta; k, \mu)(1 - \zeta),$$

de donde

$$0 \leq - \frac{\partial \hat{w}}{\partial k} / \frac{\partial \hat{w}'}{\partial k} \leq 1 - \zeta \leq 1,$$

y, por tanto,

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(k, \gamma)}(c; k, \mu(k), \gamma(k)) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\partial \hat{w}'}{\partial k}(c; k, \mu(k), \gamma(k)) < 0.$$

Tomando c suficientemente próximo a $\zeta = 0$,

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(k, \gamma)}(c; k, \mu(k), \gamma(k)) < 0.$$

Concluimos que $\mu'(k) > 0$.

I. FÓRMULAS EXPLÍCITAS. Para calcular la derivada de $\mu(k)$ en $k = 0$ se deriva (6.3) implícitamente, llegándose a

$$\frac{d\mu}{dk}(0) = - \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(k, \gamma)} / \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(\mu, \gamma)},$$

donde los jacobianos se evalúan en $(c; 0, \mu_0, \gamma_0)$. El siguiente lema contiene las cantidades que intervienen en dicha expresión.

Lema 6.4. Sean \tilde{w} y \hat{w} las soluciones de los problemas $(\tilde{P}_{k,\mu})$ y $(\hat{P}_{k,\mu})$ respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \gamma}(\zeta; 0, \mu_0, \gamma_0) &= 1, \\ \frac{\partial \tilde{w}'}{\partial \gamma}(\zeta; 0, \mu_0, \gamma_0) &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{w}'}{\partial \mu}(\zeta; 0, \mu_0, \gamma_0) &= \zeta - \frac{n(m-1)+1}{m-1} \frac{\int_0^\zeta \tilde{w}^{1/(m-1)}(t; 0, \mu_0, \gamma_0) t^{n-1} dt}{\zeta^{n-1} \tilde{w}^{1/(m-1)}(\zeta; 0, \mu_0, \gamma_0)}, \\ \frac{\partial \tilde{w}'}{\partial k}(\zeta; 0, \mu_0, \gamma_0) &= \frac{m-1}{m} \frac{\int_0^\zeta \tilde{w}^{m/(m-1)}(t; 0, \mu_0, \gamma_0) t^{n-1} dt}{\zeta^{n-1} \tilde{w}^{1/(m-1)}(\zeta; 0, \mu_0, \gamma_0)}, \\ \frac{\partial \hat{w}}{\partial \gamma}(\zeta; 0, \mu_0, \gamma_0) &= 0, \\ \frac{\partial \hat{w}'}{\partial \gamma}(\zeta; 0, \mu_0, \gamma_0) &= 0, \\ \frac{\partial \hat{w}'}{\partial \mu}(\zeta; 0, \mu_0, \gamma_0) &= \zeta + \frac{n(m-1)+1}{m-1} \frac{\int_\zeta^1 \hat{w}^{1/(m-1)}(t; 0, \mu_0, \gamma_0) t^{n-1} dt}{\zeta^{n-1} \hat{w}^{1/(m-1)}(\zeta; 0, \mu_0, \gamma_0)}, \\ \frac{\partial \hat{w}'}{\partial k}(\zeta; 0, \mu_0, \gamma_0) &= -\frac{m-1}{m} \frac{\int_\zeta^1 \hat{w}^{m/(m-1)}(t; 0, \mu_0, \gamma_0) t^{n-1} dt}{\zeta^{n-1} \hat{w}^{1/(m-1)}(\zeta; 0, \mu_0, \gamma_0)}.\end{aligned}$$

Prueba. Los resultados relativos a \tilde{w} se obtienen realizando las siguientes operaciones:

- (i) multiplicamos la ecuación por $\zeta^{n-1} \tilde{w}^{1/(m-1)}$;
- (ii) integramos en $(0, \zeta)$, imponiendo la condición de frontera $\tilde{w}'(0) = 0$;
- (iii) derivamos con respecto a γ , k ó μ , según el caso;
- (iv) hacemos $k = 0$, $\mu = \mu_0$ y $\gamma = \gamma_0$.

Los resultados relativos a \hat{w} se obtienen realizando las siguientes operaciones:

- (i) multiplicamos la ecuación por $\zeta^{n-1} \hat{w}^{1/(m-1)}$;
- (ii) integramos en $(\zeta, 1)$, imponiendo la condición de frontera $\hat{w}(1) = 0$;
- (iii) derivamos con respecto a γ , k ó μ , según el caso;
- (iv) hacemos $k = 0$, $\mu = \mu_0$, $\gamma = \gamma_0$. \square

Así, los determinantes jacobianos valen

$$\begin{aligned}\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(k, \gamma)}(c; 0, \mu_0, \gamma_0) &= \frac{\partial \tilde{w}'}{\partial k}(c; 0, \mu_0, \gamma_0) - \frac{\partial \hat{w}'}{\partial k}(c; 0, \mu_0, \gamma_0) \\ &= \frac{m-1}{m} \frac{\int_0^1 (1-t^2)^{m/(m-1)} t^{n-1} dt}{c^{n-1} 2(n(m-1)+1)(1-c^2)^{1/(m-1)}}, \\ \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(\mu, \gamma)}(c; 0, \mu_0, \gamma_0) &= \frac{\partial \hat{w}'}{\partial \mu}(c; 0, \mu_0, \gamma_0) - \frac{\partial \tilde{w}'}{\partial \mu}(c; 0, \mu_0, \gamma_0) \\ &= \frac{n(m-1)+1}{m-1} \frac{\int_0^1 (1-t^2)^{1/(m-1)} t^{n-1} dt}{c^{n-1} (1-c^2)^{1/(m-1)}},\end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$\tilde{w}(\zeta; 0, \mu_0, \gamma_0) = \hat{w}(\zeta; 0, \mu_0, \gamma_0) = \frac{(1 - \zeta^2)_+}{2(n(m-1) + 1)}.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dk}(0) &= \frac{(m-1)^2}{2m(n(m-1) + 1)^2} \frac{\int_0^1 (1-t^2)^{m/(m-1)} t^{n-1} dt}{\int_0^1 (1-t^2)^{1/(m-1)} t^{n-1} dt} \\ &= \frac{(m-1)^2}{2m(n(m-1) + 1)^2} \frac{B(n/2, 1 + m/(m-1))}{B(n/2, m/(m-1))}. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta una vez más que $B(p, 1+q) = (q/(p+q))B(p, q)$, llegamos finalmente a la fórmula (6.2). \square

CAPÍTULO III

SOLUCIONES AUTOSEMEJANTES DE TIPO (T1) PARA $k < 0$

En este capítulo estudiamos la existencia de soluciones autosemejantes de tipo (T1) en el caso de reacción, $k < 0$. En la sección 1 damos un resultado de existencia y probamos también que la rama de soluciones de dicho tipo está confinada en un intervalo finito de valores negativos de κ . En la sección 2 presentamos distintos resultados numéricos concernientes a soluciones de la forma (T1).

1. Soluciones autosemejantes reactivas de tipo (T1)

El método descrito en el capítulo anterior muestra que la rama de soluciones existe también para un cierto intervalo de valores de k negativos. De hecho, podemos afirmar lo siguiente:

Teorema 1.1. *Hay un intervalo, $(-\varepsilon, 0]$, de valores del parámetro k y una función analítica $\mu(k)$ definida en dicho intervalo tales que el problema (II.1.1) tiene una solución, siendo f^{m-1} analítica y $\mu'(k) > 0$.*

El ingrediente básico es la transversalidad de la conexión para $k = 0$. No hemos sido capaces de probar que esta transversalidad se mantenga a medida que la rama avanza, perdiendo así la posibilidad de establecer rigurosamente la continuación. Probaremos que, en cualquier caso, el intervalo de definición de la rama de soluciones está acotado. Para simplificar la exposición en lo que sigue tomaremos $n = 1$.

Teorema 1.2. *El problema (II.1.2) no tiene solución para*

$$k < -\frac{2m^2}{(m-1)^2} \left(\frac{2m-1}{m-1} \right)^{2(m-1)/m}.$$

El primer paso para probar el teorema 1.2 consiste en establecer una cota superior para $\mu(k)$ y probar la monotonía de w .

Lema 1.3. *Sea $w(\zeta)$ una solución de (II.1.2) con $k < 0$. Entonces $\mu < (m-1)/m$ y $w'(\zeta) < 0$ para todo $0 < \zeta < 1$.*

Prueba. Multiplicamos (II.1.2.a) por $w^{1/(m-1)}$ e integramos en $(0, 1)$. Utilizando las condiciones de frontera obtenemos

$$(1 - \mu) \int_0^1 \zeta (w^{1/(m-1)})' d\zeta = \int_0^1 w^{1/(m-1)} \left(\frac{m-1}{m} kw - \frac{\mu}{m-1} \right) d\zeta.$$

Integrando por partes el primer miembro e imponiendo las condiciones de frontera,

$$(1.1) \quad (m\mu - (m-1)) \int_0^1 w^{1/(m-1)} d\zeta = \frac{k(m-1)^2}{m} \int_0^1 w^{m/(m-1)} d\zeta.$$

Por ser $k < 0$, necesariamente $\mu < (m-1)/m$.

Para probar la monotonía observamos que en un punto crítico de w , donde $w' = 0$, (II.1.2.a) implica que

$$(1.2) \quad \text{sign}(w'') = \text{sign}\left(\frac{m-1}{m}kw - \frac{\mu}{m-1}\right).$$

Distinguimos dos casos.

(i) $\mu \geq 0$. En este caso $w'' < 0$ y, por tanto, todos los puntos críticos son máximos. Ello implica que $w'(\zeta) < 0$ para $0 < \zeta < 1$.

(ii) $\mu < 0$. Este caso requiere un análisis más cuidadoso. Supongamos que $w' \geq 0$ en algún punto de $(0, 1)$. Entonces w tiene un punto crítico $\bar{\zeta} \in [0, 1)$ que es un punto de mínimo local. La identidad (1.2) muestra que $w(\bar{\zeta}) \leq \mu/(m-1)^2k$. Por tanto, $f'(\bar{\zeta}) = 0$ y $0 < f(\bar{\zeta}) \leq (\mu/k(m-1))^{1/(m-1)} \equiv x_0$. Veamos que esto conduce a una contradicción.

Multiplicamos la ecuación (II.1.1.a) por $(f^m)'$, obteniendo

$$\frac{1}{2} \left(((f^m)')^2 \right)' + (1-\mu)m\zeta f^{m-1}(f')^2 + \frac{\mu m}{(m-1)(m+1)}(f^{m+1})' - \frac{k}{2}(f^{2m})' = 0$$

Integrando entre $\bar{\zeta}$ y 1, que son puntos críticos de f^m , se tiene que

$$-\frac{\mu m}{(m-1)(m+1)}f^{m+1}(\bar{\zeta}) + \frac{k}{2}f^{2m}(\bar{\zeta}) = -(1-\mu)m \int_{\bar{\zeta}}^1 \zeta f^{m-1}(f')^2 d\zeta < 0.$$

Definiendo $\phi(x) = -\frac{\mu m}{(m-1)(m+1)}x^{m+1} + \frac{k}{2}x^{2m}$, esta expresión se puede reescribir como

$$(1.3) \quad \phi(f(\bar{\zeta})) < 0.$$

Por otra parte,

$$\phi'(x) = -mx^m \left(\frac{\mu}{m-1} + kx^{m-1} \right) \geq 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq x_0.$$

Por tanto, $\phi(x) \geq 0$ si $0 \leq x \leq x_0$ y, en particular, $\phi(f(\bar{\zeta})) > 0$, contradiciendo (1.3). \square

Necesitaremos también los resultados contenidos en los lemas auxiliares que siguen.

Lema 1.4. Sea w una solución del problema (II.1.2) con $k < 0$. Entonces

- (i) $w(0) > \frac{m}{(m-1)^2} \left(\frac{(m-1) - m\mu}{|k|} \right)$.
- (ii) $H(\zeta) \leq 0$ si $0 \leq \zeta \leq 1$,
- (iii) $w''(\zeta) < 0$ si $0 \leq \zeta \leq 1$.

Prueba. (i) A partir de (1.1) obtenemos que

$$\begin{aligned} ((m-1) - m\mu) \int_0^1 w^{1/(m-1)} d\zeta &= \frac{(m-1)^2 |k|}{m} \int_0^1 w^{m/(m-1)} d\zeta \\ &< \frac{(m-1)^2 |k| w(0)}{m} \int_0^1 w^{1/(m-1)} d\zeta, \end{aligned}$$

y, por tanto, que $w(0) > \frac{m}{(m-1)^2} \left(\frac{(m-1) - m\mu}{|k|} \right)$.

(ii) Recordemos que $H(\zeta) = w'(\zeta) + (1 - \mu)\zeta$. De acuerdo con (II.1.2.a), H satisface la ecuación diferencial

$$(1.4) \quad H' + \frac{w'}{(m-1)} \frac{H}{w} = \frac{m-1}{m} kw - \left(\frac{m\mu}{m-1} - 1 \right).$$

De las condiciones iniciales se sigue que $H(0) = 0$. Haciendo uso de la fórmula (II.3.1) que, gracias a la monotonía de w , sigue siendo válida para $k \leq 0$, deducimos que $H(1) = 0$. Por el apartado (i), $H'(0) < 0$. Por consiguiente, hay un pequeño entorno a la derecha de $\zeta = 0$ donde $H(\zeta) < 0$. Es más, repitiendo la prueba del lema 4.1.(b) de [HP], con los cambios necesarios para incluir $m > 1$ general, es fácil ver que

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1^-} H'(\zeta) = \frac{m-1}{m} \left(1 - \frac{m\mu}{m-1} \right).$$

Dado que $\mu < (m-1)/m$, se obtiene que $H'(1) > 0$. Existe, por tanto, un entorno a la izquierda de $\zeta = 1$ donde $H(\zeta) < 0$.

Supongamos ahora que $H(\bar{\zeta}) > 0$ para algún $\bar{\zeta}$ tal que $0 < \bar{\zeta} < 1$. La función H debe tener un primer cero $\zeta_0 \in (0, \bar{\zeta})$ y un último cero $\zeta_1 \in (\bar{\zeta}, 1)$. Es más, $H'(\zeta_0) \geq 0$ y $H'(\zeta_1) \leq 0$. La ecuación (1.4) conduce a

$$\begin{aligned} 0 \leq H'(\zeta_0) &= \frac{m-1}{m} kw(\zeta_0) - \left(\frac{m\mu}{m-1} - 1 \right), \\ 0 \geq H'(\zeta_1) &= \frac{m-1}{m} kw(\zeta_1) - \left(\frac{m\mu}{m-1} - 1 \right). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} w(\zeta_0) &\leq \frac{m}{(m-1)|k|} \left(1 - \frac{m\mu}{m-1}\right), \\ w(\zeta_1) &\geq \frac{m}{(m-1)|k|} \left(1 - \frac{m\mu}{m-1}\right), \end{aligned}$$

contradiendo la monotonía estricta de w . Así, $H(\zeta) \leq 0$ para todo $0 \leq \zeta \leq 1$.

(iii) Sabemos que $w''(0) < 0$ (obsérvese que $H'(0) = w''(0) + (1 - \mu) < 0$) y también que $w''(1) = -1/m < 0$ (esto es, la fórmula (II.3.2), que sigue siendo válida para $k \leq 0$). Supongamos que hay un punto $\tilde{\zeta} \in (0, 1)$ tal que $w''(\tilde{\zeta}) \geq 0$. Existe entonces un último cero, $\zeta_1 \in [\tilde{\zeta}, 1)$, de w'' que satisface $w''(\zeta_1) = 0$ y $w'''(\zeta_1) \leq 0$. Calculando w''' obtenemos

$$w''' = \frac{m-1}{m} kw' - \frac{1}{m-1} \frac{w''}{w} H + \frac{1}{m-1} \frac{w'^2}{w^2} H - \frac{1}{m-1} \frac{w'}{w} H'.$$

En ζ_1 tenemos

$$w''' = \frac{m-1}{m} kw' + \frac{1}{m-1} \frac{w'^2}{w^2} H - \frac{1-\mu}{m-1} \frac{w'}{w}.$$

Despejando H de (II.1.2.a) y sustituyendo, obtenemos que en dicho punto

$$w''' = \frac{m-1}{m} kw' + \frac{w'}{w} \left(\frac{m-1}{m} kw - \frac{\mu}{m-1} - \frac{1-\mu}{m-1} \right) = w' \left(\frac{2(m-1)k}{m} - \frac{1}{(m-1)w} \right).$$

Por ser $k < 0$ el término entre corchetes es negativo y, recordando que $w' < 0$, concluimos que $w'''(\zeta_1) > 0$, una contradicción. \square

En el transcurso de la prueba hemos obtenido que

$$(1.5) \quad w''' = -\frac{w''}{(m-1)w} H + \frac{w'}{w} Q,$$

donde

$$Q = -\frac{m}{m-1} w'' + \frac{2(m-1)}{m} kw - \frac{1}{m-1}.$$

Probamos a continuación que $Q(\zeta) \leq 0$ para todo $0 \leq \zeta \leq 1$.

Lema 1.5. Si $k < 0$, entonces $Q(\zeta) \leq 0$ para todo $0 \leq \zeta \leq 1$.

Prueba. Se sigue de la fórmula (II.3.2) que $Q(1) = 0$. Supongamos que $Q(0) > 0$. Sea $\zeta = \delta$ el primer punto a la derecha de $\zeta = 0$ donde se anula Q . Puesto que $w' < 0$, $w'' < 0$ y $H \leq 0$, la fórmula (1.5) implica que $w''' < 0$ en $(0, \delta)$. Así, $Q' > 0$ en $(0, \delta)$, lo que contradice al hecho de que $Q(\delta) = 0$. Por tanto, $Q(0) \leq 0$. Esto implica que si Q es

positivo en $(0, 1)$, entonces tiene un máximo positivo en dicho intervalo. En un máximo tal,

$$w''' = \frac{2(m-1)^2}{m^2} kw'.$$

Puesto que, por (1.5), $w''' < 0$ cuando $Q > 0$, tenemos una contradicción. \square

Tenemos ya todas las herramientas para probar el teorema 1.2.

Prueba del teorema 1.2. Sean $k < 0$ y μ tales que el problema (II.1.2) tiene solución. Puesto que $Q \leq 0$ tenemos que

$$w''(\zeta) \geq \frac{2(m-1)^2}{m^2} kw - \frac{1}{m}.$$

Multiplicando esta desigualdad por w' e integrando en $(0, 1)$ obtenemos

$$\frac{(1-\mu)^2}{2} \leq \frac{(m-1)^2}{m^2} |k| w^2(0) + \frac{w(0)}{m}.$$

Por consiguiente,

$$|k| w^2(0) + \frac{mw(0)}{(m-1)^2} - \frac{m^2(1-\mu)^2}{2(m-1)^2} \geq 0.$$

De esta desigualdad y del hecho de que $w(0) > 0$ obtenemos que

$$w(0) \geq \frac{m}{(m-1)^2} \frac{-1 + \sqrt{1 + 2|k|(1-\mu)^2(m-1)^2}}{2|k|}.$$

Por la concavidad de w ,

$$(1.6) \quad w(\zeta) \geq \frac{m}{(m-1)^2} \frac{-1 + \sqrt{1 + 2|k|(1-\mu)^2(m-1)^2}}{2|k|} (1 - \zeta).$$

Por la desigualdad de Jensen

$$\int_0^1 w^{1/(m-1)} d\zeta \leq \left(\int_0^1 w^{m/(m-1)} d\zeta \right)^{1/m},$$

por lo que (1.1) produce

$$(m-1) - m\mu \geq \frac{|k|(m-1)^2}{m} \left(\int_0^1 w^{m/(m-1)} d\zeta \right)^{(m-1)/m},$$

lo que, combinado con (1.6), conduce a

$$(m-1) - m\mu \geq \frac{-1 + \sqrt{1 + 2|k|(1-\mu)^2(m-1)^2}}{2} \left(\frac{m-1}{2m-1} \right)^{(m-1)/m}.$$

A partir de esta desigualdad concluimos, utilizando que $\mu < (m-1)/m$ y haciendo algunas manipulaciones sencillas, que

$$|k| \leq \frac{2m^2}{(m-1)^2} \left(\frac{2m-1}{m-1} \right)^{2(m-1)/m}. \quad \square$$

En cuanto a la existencia de soluciones de la forma (T1) para valores negativos de k tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.6. *Para cada $\mu < (m-1)/m$ hay un valor de $k < 0$ tal que existe una solución del problema (II.1.2).*

Prueba. Utilizamos un argumento topológico. Como hemos visto en el lema II.2.1, para $\mu < (m-1)/m$ fijo y $k \in (-\infty, 0]$ variable existe una solución local a la izquierda de $\zeta = 1$. La solución se puede prolongar hacia la izquierda mientras que w no se anule (para lo cual previamente tendrá que anularse w') y no haya una asíntota vertical. Hay en principio cuatro comportamientos posibles:

- (i) $w'(\zeta) < 0$ para $\zeta \in [0, 1)$;
- (ii) existe un valor $\bar{\zeta} \in (0, 1)$ tal que $w'(\bar{\zeta}) = 0$;
- (iii) $w'(\zeta) < 0$ para $\zeta \in (0, 1)$, $w'(0) = 0$;
- (iv) w tiene una asíntota vertical en $\zeta = \bar{\zeta}$, $0 \leq \bar{\zeta} < 1$ y $w'(\zeta) < 0$ para $\zeta \in (\bar{\zeta}, 1)$

El comportamiento (iii) corresponde a soluciones del problema (II.1.2). El comportamiento (iv) en realidad no se puede producir. Si se diera, existiría un punto $\zeta = \zeta_1$ con $\bar{\zeta} < \zeta_1$ tal que $(m-1)|k|w/m > -\mu/(m-1)$ y $|w'| > (1-\mu)$ para todo $\zeta \in (\bar{\zeta}, \zeta_1)$. Pero la ecuación (II.1.2.a) implica en este caso que $w'' < 0$ en $(\bar{\zeta}, \zeta_1)$ lo que es incompatible con la existencia de la asíntota. Así pues, sólo son posibles los comportamientos (i)–(iii). Consideramos tres subconjuntos de $(-\infty, 0]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{k \in (-\infty, 0] \text{ tales que se da el comportamiento (i)}\}, \\ \mathcal{B} &= \{k \in (-\infty, 0] \text{ tales que se da el comportamiento (ii)}\}, \\ \mathcal{C} &= \{k \in (-\infty, 0] \text{ tales que se da el comportamiento (iii)}\}. \end{aligned}$$

Los conjuntos \mathcal{A} y \mathcal{B} son abiertos. Probaremos que, además, son no vacíos, de donde se deduce que \mathcal{C} es no vacío.

El valor $k = 0$ pertenece a \mathcal{A} . Si no fuera cierto habría un $\bar{\zeta} \in [0, 1)$ tal que $w'(\bar{\zeta}) = 0$. Multiplicamos (II.1.2.a) por $w^{1/(m-1)}$ e integramos en $(\bar{\zeta}, 1)$ para obtener

$$\int_{\bar{\zeta}}^1 (w'w^{1/(m-1)})' d\zeta + (1-\mu) \int_{\bar{\zeta}}^1 (w^{1/(m-1)})' \zeta d\zeta + \frac{\mu}{m-1} \int_{\bar{\zeta}}^1 w^{1/(m-1)} d\zeta = 0.$$

Integrando por partes e imponiendo las condiciones en $\zeta = 1$ y $\zeta = \bar{\zeta}$ obtenemos que

$$\bar{\zeta}(1-\mu)w^{1/(m-1)}(\bar{\zeta}) = \frac{m\mu - (m-1)}{m-1} \int_{\bar{\zeta}}^1 w^{1/(m-1)} d\zeta.$$

Como $\mu < (m-1)/m$, obtenemos que $\bar{\zeta} < 0$, en contradicción con la hipótesis.

Si $k < 0$ y $|k|$ es suficientemente grande, k pertenece a \mathcal{B} . Si no fuera cierto, entonces $w' < 0$ en $(0, 1)$. Multiplicamos (II.1.2.a) por $w^{1/(m-1)}$ e integramos en $(0, 1)$ obteniendo que

$$\int_0^1 (w' w^{1/(m-1)})' d\zeta + (1 - \mu) \int_0^1 (w^{1/(m-1)})' \zeta d\zeta + \frac{\mu}{m-1} \int_0^1 w^{1/(m-1)} d\zeta + \frac{m-1}{m} |k| \int_0^1 w^{m/(m-1)} d\zeta = 0.$$

Integrando por partes e imponiendo las condiciones de frontera obtenemos que

$$-w'(0)w^{1/(m-1)}(0) + \left(\frac{m\mu}{m-1} - 1\right) \int_0^1 w^{1/(m-1)} d\zeta + \frac{m-1}{m} |k| \int_0^1 w^{m/(m-1)} d\zeta = 0.$$

El primer término es no negativo y $\int_0^1 w^{m/(m-1)} d\zeta \geq \left(\int_0^1 w^{1/(m-1)} d\zeta\right)^m$. Por tanto,

$$(1.7) \quad \left(\frac{m\mu}{m-1} - 1\right) + \frac{m-1}{m} |k| \left(\int_0^1 w^{1/(m-1)} d\zeta\right)^{m-1} \leq 0.$$

Necesitamos ahora el siguiente lema auxiliar:

Lema 1.7. Si $w' < 0$ en $(0, 1)$, entonces $H \leq 0$ y $w'' < 0$ en $[0, 1]$.

Prueba. Si $w'(0) = 0$, entonces w es una solución del problema (II.1.2) y el resultado está contenido en el lema 1.4. Si $w'(0) < 0$, entonces $H(0) = w'(0) < 0$ y la prueba sigue como en el lema 1.4. \square

Por consiguiente, $w' \leq -(1 - \mu)\zeta$. Integrando esta desigualdad en $(0, 1)$ obtenemos que $w(0) \geq (1 - \mu)/2$. Gracias a la concavidad de w se tiene que

$$w(\zeta) \geq \frac{1 - \mu}{2} (1 - \zeta).$$

Por tanto,

$$\left(\int_0^1 w^{1/(m-1)} d\zeta\right)^{m-1} \geq \frac{1 - \mu}{2} \left(\frac{m-1}{m}\right)^{m-1}.$$

Combinando esta estimación con (1.7) obtenemos

$$\left(\frac{m\mu}{m-1} - 1\right) + |k| \left(\frac{m-1}{m}\right)^m \frac{1 - \mu}{2} \leq 0.$$

Tomando $|k|$ suficientemente grande llegamos a una contradicción. \square

El hecho de que haya soluciones con $\mu < 0$ señala un cambio cualitativo importante, ya que los valores negativos de μ corresponden a soluciones que crecen con el tiempo partiendo de un dato inicial $u(x, 0) \equiv 0$. Tenemos en este caso *no unicidad*: la solución nula resulta ser bastante inestable y en cualquier momento t_0 puede surgir de cualquier punto x_0 una solución autosemejante positiva de la forma

$$u(x, t) = (t - t_0)^{-\sigma} f(|x - x_0|/(t - t_0)^\nu),$$

con exponentes $-\sigma = -\mu/(m - 1) > 0$ y $\nu = 1 - \mu > 1$, a partir del estado $u \equiv 0$ para $t \leq t_0$. Este tipo de inestabilidad es típico de sistemas no lineales y ha sido denotado en ocasiones como efecto *hair-trigger*. Aparece, por ejemplo, en [PV] en el estudio de la ecuación de reacción-difusión $u_t = (u^m)_{xx} + u^p$ con $p < 1 < m$ y $p + m \geq 2$.

No sabemos si hay unicidad para los valores de k para los cuales $\mu(k) > 0$. En cualquier caso, es fácil ver que el principio del máximo no se satisface en general para soluciones del problema de Cauchy con $k < 0$.

2. Resultados numéricos

Según acabamos de ver, la rama de soluciones existe en un intervalo de valores de k negativos. En esta sección describimos los resultados de los experimentos numéricos, que muestran que la rama se puede continuar hasta alcanzar una asíntota vertical, $\mu(k) \rightarrow -\infty$, cuando k tiende a un valor crítico finito, $k \downarrow -k_*(m) > -\infty$.

Como ya indicamos en el capítulo I, conviene trabajar con el parámetro normalizado

$$\kappa = \frac{k(m - 1)^2}{m^2}$$

en vez de con k . En la figura 1 se representa μ frente a κ para distintos valores de m .

Hemos utilizado un método de disparo basado en el análisis teórico del capítulo II. Una inspección cuidadosa de los resultados numéricos conduce a las conclusiones que siguen:

- (i) Para cada $m > 1$ hay un valor crítico $\kappa_*(m)$ tal que hay una función $\mu(\kappa; m)$ definida en el intervalo $(-\kappa_*(m), \infty)$ para la cual el problema (II.1.2) tiene una solución. La función μ se incrementa monótonamente con κ , y $\mu(\kappa; m) \rightarrow -\infty$ cuando $\kappa \downarrow -\kappa_*$. De hecho, éste es el comportamiento que obtendríamos si fuéramos capaces de probar que la transversalidad se mantiene a medida que la rama avanza.
- (ii) Para κ fijo el valor de μ se incrementa con m .
- (iii) El valor crítico $\kappa_*(m)$ está acotado superiormente por una constante independiente de m . Esto está de acuerdo con la estimación del lema 1.2, que dice que

$$\kappa_*(m) \leq 2 \left(\frac{2m - 1}{m - 1} \right)^{2(m-1)/m},$$

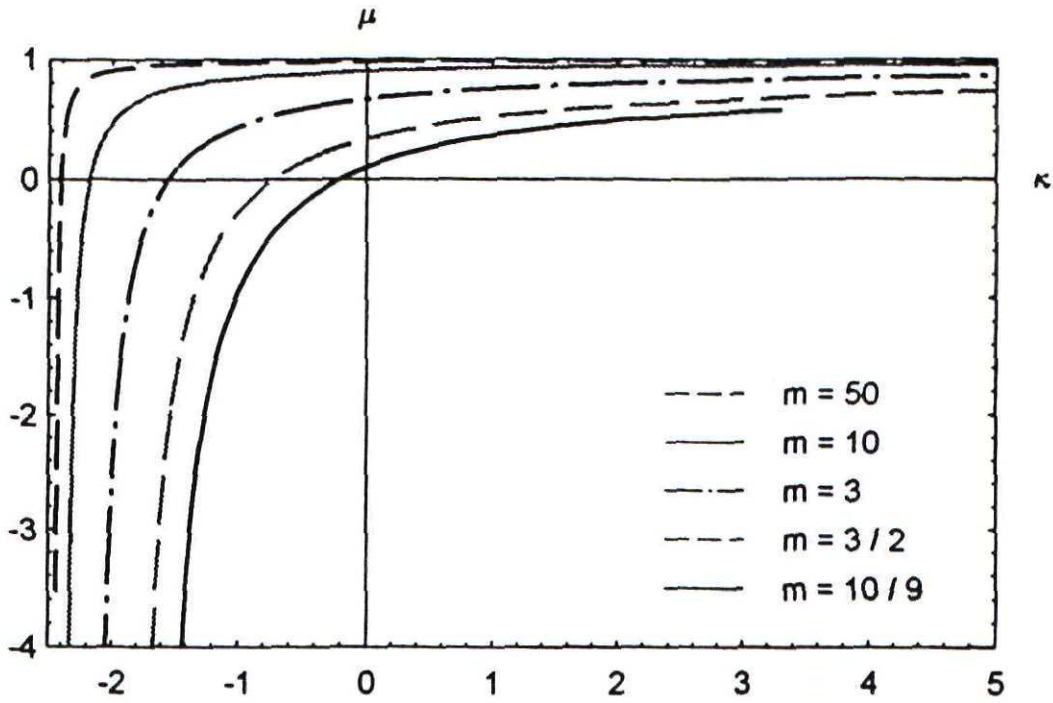


FIGURA 1. μ frente a κ para distintos valores de m .

ya que es fácil ver que el segundo miembro de esta desigualdad es menor que 8. Así pues, $\kappa_*(m) < 8$. Argumentos heurísticos posteriores sugieren que

$$\sup_{m>1} \kappa_*(m) = \pi^2/4.$$

Así mismo, $\kappa_*(m)$ está acotado inferiormente por 1. Esta cota se puede obtener observando que

$$(2.1) \quad \frac{m}{(m-1)^2} \left(\frac{(m-1) - m\mu}{|k|} \right) < w(0) < 1 - \mu,$$

donde la estimación superior de $w(0)$ es consecuencia directa de la concavidad de w . Por lo tanto,

$$|\kappa| \geq \frac{(m-1) - m\mu}{m(1-\mu)}.$$

Haciendo $\kappa \rightarrow -\kappa_*(m)$ (y, por tanto, $\mu \rightarrow -\infty$) obtenemos que $\kappa_*(m) \geq 1$.

En la figura 2 representamos, en el caso $m = 3/2$, la función presión w para distintos valores de κ .

Obsérvese que el máximo de la presión se incrementa dramáticamente cuando nos acercamos a $-\kappa_*$. Esto concuerda con la estimación inferior para $w(0)$ dada en (2.1).

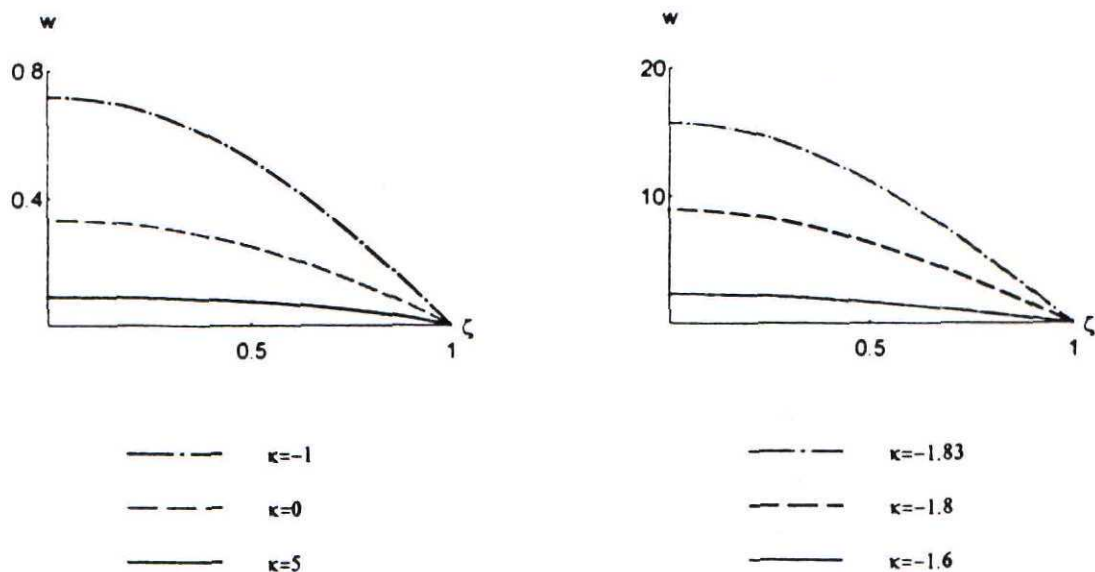


FIGURA 2. w frente a ζ para $m = 3/2$ y distintos valores de κ .

Consideremos ahora el caso límite $m \rightarrow \infty$, con $\kappa < 0$. Para κ fijo, $\kappa > -\pi^2/4$, el exponente μ se aproxima a 1 cuando m tiende a $+\infty$. En consecuencia, las soluciones autosemejantes correspondientes degeneran a cero cuando m tiende a infinito, como se ve en la figura 3, donde se representa w frente a ζ para distintos valores de m con κ fijo.

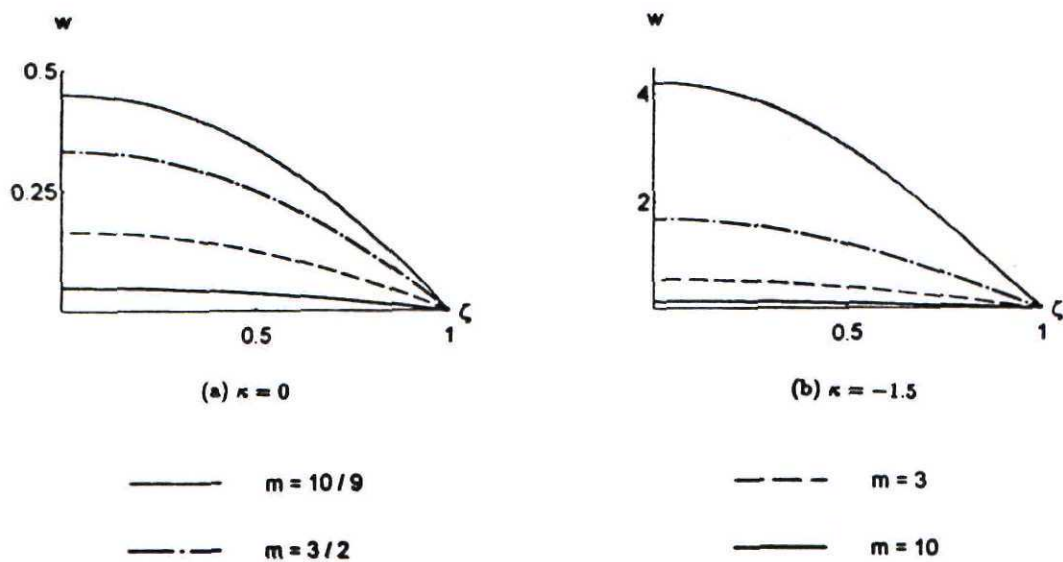


FIGURA 3. w frente a ζ para κ fijo y distintos valores de m .

Por otra parte, si hacemos formalmente el límite $m \rightarrow \infty$ en la ecuación (II.1.2) sustituyendo la tercera condición de (II.1.2.c) por la condición equivalente $w'(1) = -(1 - \mu)$, obtenemos

$$\left. \begin{aligned} (2.2.a) \quad & w'' + |\kappa|w = 0 && \text{si } 0 < \zeta < 1, \\ (2.2.b) \quad & w > 0 && \text{si } 0 \leq \zeta < 1, \\ (2.2.c) \quad & w'(0) = 0, w(1) = 0 \text{ y } w'(1) = -(1 - \mu). \end{aligned} \right\}$$

Las soluciones de (2.2.a) son de la forma

$$w(\zeta) = A \cos(\sqrt{|\kappa|}\zeta) + B \sin(\sqrt{|\kappa|}\zeta).$$

La primera condición de (2.2.c) implica que $B = 0$, y la segunda que

$$A \cos(\sqrt{|\kappa|}) = 0.$$

La condición (2.2.b) excluye el caso $A = 0$. La otra posibilidad es que $\sqrt{|\kappa|} = \pi/2$, es decir,

$$(2.3) \quad |\kappa| = \frac{\pi^2}{4}.$$

La tercera condición de (2.2.c) y la condición (2.2.b) implican que $A = 2(1 - \mu)/\pi > 0$. Por consiguiente, en el caso límite $m \rightarrow \infty$ hay solución sólo para $\kappa = -\kappa_* = -\pi^2/4$, una cantidad que acota a $-\kappa_*(m)$ por debajo. Obsérvese que para cada valor de $\mu < 1$ obtenemos una solución, $w(\zeta) = (2(1 - \mu)/\pi) \cos(\pi\zeta/2)$. El valor límite (2.3) coincide con nuestros cálculos numéricos.

CAPÍTULO IV

NUEVOS TIPOS DE AUTOSEMEJANZA

En el capítulo anterior hemos visto (teorema III.1.2) que las soluciones autosemejantes de tipo (T1) están confinadas en un intervalo finito de valores negativos del parámetro $\kappa = k(m-1)^2/m^2$. Además, en la figura III.1 se mostraba que la rama se aproxima a una asíntota, $\mu(\kappa) \rightarrow -\infty$, cuando κ tiende a un valor crítico finito, $\kappa \downarrow -\kappa_*(m)$. El valor crítico $\kappa = -\kappa_*(m) < 0$ es un punto de transición abrupta a una región donde el comportamiento asintótico de las soluciones no viene dado en términos de soluciones autosemejantes de la forma (T1).

Más allá de $\kappa = -\kappa_*(m)$ entramos en un territorio inexplorado. La única información previa que tenemos proviene del trabajo de Samarskii y otros [SZKM], donde se estudia la ecuación

$$u_t = (u^{m-1}u_x)_x + u^m$$

y se obtiene una solución autosemejante explícita que explota en tiempo finito y tiene soporte fijo $[-l_0, l_0]$, con $l_0 = \pi m^{1/2}/(m-1)$. Dicha solución explícita es también solución de la ecuación

$$\frac{m^{\frac{3}{2}}\pi}{m-1}u_t = l_0(u^m)_{xx} + \frac{\pi^2 m^2}{(m-1)^2} \frac{u^m}{l_0}.$$

Cambiando la escala de tiempo adecuadamente obtenemos una solución explícita de

$$u_t = l_0(u^m)_{xx} + \kappa_{\#} \frac{u^m}{l_0}$$

con soporte fijo de radio l_0 , precisamente para el valor $\kappa_{\#} = \pi^2$. Esta solución explota en tiempo finito, un comportamiento absolutamente diferente del de las soluciones de tipo (T1). Comparando con la estimación del teorema III.1.2, observamos que $\kappa_{\#} > \kappa_*(m)$. Hay un hueco entre ambos valores.

Los argumentos anteriores nos llevan a considerar nuevos tipos de autosemejanza. Así, en la sección 1 probaremos la existencia de soluciones con explosión en tiempo finito, que esperamos que caractericen el comportamiento asintótico para $-\pi^2 < \kappa < -\kappa_*(m)$, y en la sección 2 probaremos la existencia de soluciones con crecimiento exponencial, que son un caso crítico que corresponde intuitivamente a $\kappa = -\kappa_*(m)$.

1. Soluciones con explosión en tiempo finito

La solución de la ecuación de los estallidos turbulentos obtenida a partir de la de Samarskii y otros presenta un comportamiento absolutamente diferente del de las soluciones autosemejantes de la forma (T1), ya que explota en tiempo finito. Esto nos lleva a considerar soluciones autosemejantes de la forma

$$(T2) \quad u(x, t) = (T - t)^{-\mu/(m-1)} f(\zeta), \quad \zeta = |x|(T - t)^{\mu-1}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

con $T > 0$ una constante arbitraria que representa el tiempo de explosión. Como se indicó en el capítulo II, haciendo un cambio de variable adecuado podemos suponer que el soporte del perfil es $[0, 1]$. La única diferencia formal que se obtiene al sustituir las soluciones (T2), en vez de las (T1), en la ecuación que nos ocupa, es que la derivada con respecto al tiempo se ve afectada por un signo menos. Así pues, se obtiene que, en lugar de (II.1.1) y (II.1.2), las ecuaciones satisfechas por el perfil f y la variable presión $w = mf^{m-1}/(m-1)$ son en este caso

$$\left. \begin{aligned} (1.1.a) \quad & (f^m)'' + (\mu - 1)\zeta f' - \frac{\mu}{m-1}f - \frac{\kappa m}{m-1}f^m = 0 & \text{si } 0 < \zeta < 1, \\ (1.1.b) \quad & f > 0 & \text{si } 0 \leq \zeta < 1, \\ (1.1.c) \quad & (f^m)'(0) = 0, f(1) = 0 \text{ y } (f^m)'(1) = 0, \end{aligned} \right\}$$

y

$$\left. \begin{aligned} (1.2.a) \quad & w'' + \frac{1}{m-1} \frac{w'}{w} H(\zeta) - \frac{\mu}{m-1} - \frac{\kappa m w}{m-1} = 0 & \text{si } 0 < \zeta < 1, \\ (1.2.b) \quad & w > 0 & \text{si } 0 \leq \zeta < 1, \\ (1.2.c) \quad & w'(0) = 0, w(1) = 0 \text{ y } (w^{m/(m-1)})'(1) = 0, \end{aligned} \right\}$$

donde ahora $H(\zeta) = w'(\zeta) + (\mu - 1)\zeta$.

En primer lugar vemos que las soluciones de (1.2), si existen, son monótonas.

Lema 1.1. Sea $w(\zeta)$ una solución de (1.2) para $\kappa < 0$. Entonces $w'(\zeta) < 0$ para todo $0 < \zeta < 1$.

Prueba. Es análoga a la del lema III.1.3. \square

Demostraremos que $\mu \geq 1$ gracias al siguiente lema:

Lema 1.2. Sea w solución de (1.2). Entonces $w'(1^-) = (1 - \mu)$.

Prueba. Multiplicamos (1.2.a) por $w^{1/(m-1)}$ e integramos en $(\zeta, 1)$. Después de una integración por partes y de dividir por $w^{1/(m-1)}$ se llega a

$$(1.3) \quad \begin{aligned} w' = & (1 - \mu)\zeta + \frac{(m-1) - m\mu}{(m-1)w^{1/(m-1)}} \int_{\zeta}^1 w^{1/(m-1)} d\zeta \\ & - \frac{\kappa m}{(m-1)w^{1/(m-1)}} \int_{\zeta}^1 w^{m/(m-1)} d\zeta. \end{aligned}$$

Por la monotonía de w ,

$$\int_{\zeta}^1 w^{\rho} d\zeta < (1 - \zeta)w^{\rho}(\zeta), \quad \text{si } \rho > 0.$$

Por consiguiente, las dos integrales del segundo miembro de (1.3) tienden a cero cuando $\zeta \rightarrow 1^-$, de donde se sigue el resultado. \square

Corolario 1.3. *Sólo hay solución de (1.2) para $\mu \geq 1$.*

Prueba. En otro caso, w se haría negativa en un entorno a la izquierda de $\zeta = 1$. \square

Los resultados numéricos muestran que existen soluciones del problema (1.2) para todo $\kappa \in [-\pi^2, -\kappa_*(m))$. Como $\mu \geq 1$, estas soluciones explotan en tiempo finito. En la figura 1 representamos μ frente a κ , en el caso $m = 3/2$, para los dos tipos de autosemejanza considerados hasta el momento.

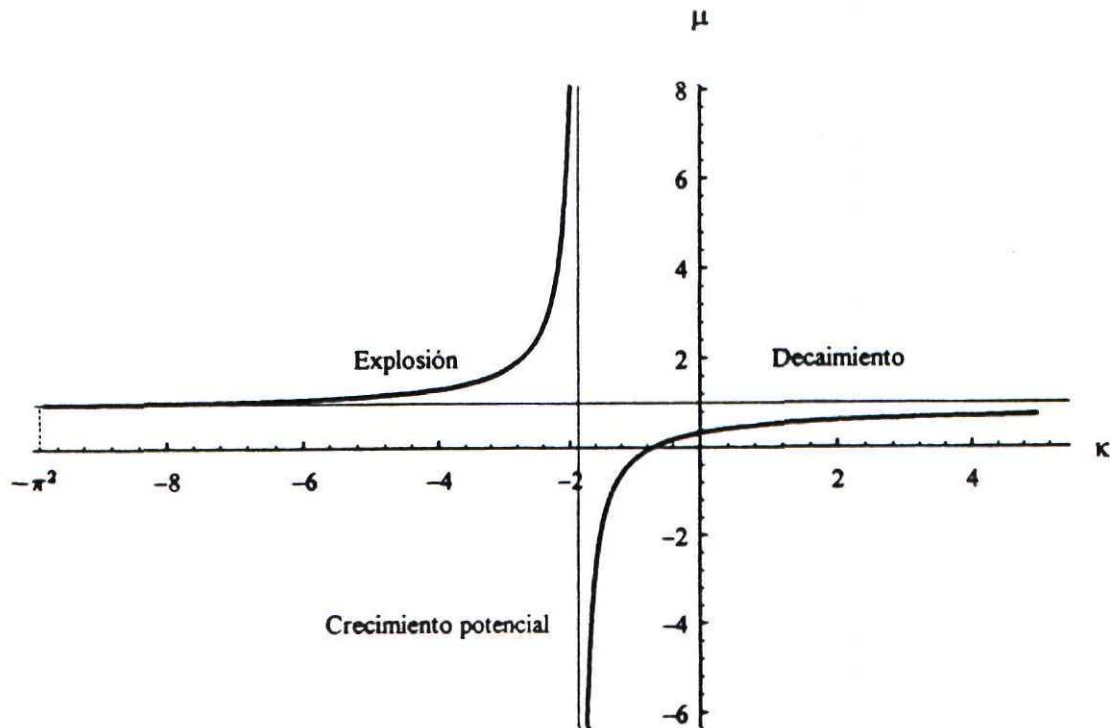


FIGURA 1. μ frente a κ para $m = 3/2$.

De hecho, se tiene el siguiente resultado de existencia relativo a soluciones de la forma (T2), cuya prueba es similar a la del teorema III.1.6:

Teorema 1.4. Para todo $\mu > 1$ hay un valor de $\kappa < 0$ tal que el problema (1.2) tiene solución.

Observación. El problema de la unicidad de este tipo de soluciones permanece abierto.

Un ingrediente fundamental de la prueba será el siguiente lema:

Lema 1.5. Para todo $\kappa \in \mathbb{R}$ y $\mu > 1$ existe una solución analítica local $w(\zeta; \kappa, \mu)$ del problema (1.2) definida en un entorno a la izquierda de $\zeta = 1$.

Prueba. Se hace sin dificultad utilizando las ideas del lema II.2.1. \square

Prueba del teorema 1.4. Al igual que en la prueba del teorema III.1.6, subdividimos $(-\infty, 0]$ como unión disjunta de

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \{\kappa \in (-\infty, 0] \text{ tales que } w'(\zeta) < 0 \text{ para } \zeta \in [0, 1)\}, \\ \mathcal{B} &= \{\kappa \in (-\infty, 0] \text{ tales que existe } \bar{\zeta} \in (0, 1) \text{ tal que } w'(\bar{\zeta}) = 0\}, \\ \mathcal{C} &= \{\kappa \in (-\infty, 0] \text{ tales que } w'(\zeta) < 0 \text{ para } \zeta \in (0, 1), w'(0) = 0\}.\end{aligned}$$

Como \mathcal{A} y \mathcal{B} son abiertos, si no son vacíos entonces \mathcal{C} tampoco lo es y obtenemos una solución de (1.2). Es fácil ver que \mathcal{A} no es vacío porque $0 \in \mathcal{A}$, lo cual se prueba con un argumento similar al del teorema III.1.6. Para demostrar que $\kappa \in \mathcal{B}$ cuando $|\kappa| \rightarrow \infty$, deducimos de (1.3) que

$$(1.4) \quad w' + (\mu - 1)\zeta = \frac{\int_{\zeta}^1 w^{1/(m-1)} d\zeta}{w^{1/(m-1)}} \left(1 - \frac{m\mu}{m-1} + \frac{m|\kappa|}{m-1} \frac{\int_{\zeta}^1 w^{m/(m-1)} d\zeta}{\int_{\zeta}^1 w^{1/(m-1)} d\zeta} \right).$$

Si $w' < 0$, tomando $\zeta = 0$ se llega a una contradicción cuando $|\kappa| \rightarrow \infty$, excepto si el término entre paréntesis permanece acotado; pero esto es imposible ya que en ese caso

$$w' + (\mu - 1)\zeta < c(1 - \zeta)$$

y, por tanto, integrando en $(\zeta, 1)$ y usando que $w \geq 0$,

$$\max\left((\mu - 1)\frac{1 - \zeta^2}{2} + \frac{c}{2}(1 - \zeta)^2, 0\right) \leq w,$$

lo que implica que el cociente de integrales que aparece en el último término entre paréntesis en (1.4) está acotado inferiormente por una constante positiva independiente de κ . Esto conduce a una contradicción. \square

Observación. Se puede probar sin mucha dificultad que las soluciones del problema (1.2) verifican que $w''(1^-) = 1/m$. Así pues, no son cóncavas. Esto nos ha llevado a tener que hacer una pequeña modificación en la prueba en relación con la del teorema III.1.6.

2. El caso crítico. Autosemejanza exponencial

La divergencia de los exponentes de autosemejanza cuando nos aproximamos al valor crítico $\kappa = -\kappa_*(m)$ sugiere buscar una solución autosemejante de la forma

$$(T3) \quad u(x, t) = e^{\lambda t / (m-1)} f(\zeta), \quad \zeta = |x|e^{-\lambda t},$$

con $\lambda > 0$ un parámetro arbitrario. De nuevo podemos suponer sin pérdida de generalidad que el soporte de f es $[0, 1]$. Después de un cambio de escala en la variable presión a $W = mf^{m-1}/\lambda(m-1)$, obtenemos el problema no lineal de autovalores

$$\left. \begin{aligned} (2.1.a) \quad & W'' + \frac{1}{m-1} \frac{W'}{W} (W' + \zeta) - \frac{1}{m-1} - \frac{\kappa m}{m-1} W = 0 & \text{si } 0 < \zeta < 1, \\ (2.1.b) \quad & W > 0 & \text{si } 0 \leq \zeta < 1, \\ (2.1.c) \quad & W'(0) = 0, W(1) = 0 \text{ y } (W^{m/(m-1)})'(1) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Obsérvese que λ ha desaparecido del problema. Empezamos probando la monotonía de W .

Lema 2.1. *Sea W una solución de (2.1) para $\kappa < 0$. Entonces $W'(\zeta) < 0$ para todo $0 < \zeta < 1$ y $W'(1^-) = -1$.*

Prueba. Sigue los mismos pasos que las demostraciones de los lemas III.1.3 y 1.2. \square

En cuanto a la existencia de soluciones del tipo (T3), tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.2. *Existe un valor de $\kappa < 0$ tal que el problema (2.1) tiene solución.*

Observación. El problema de la unicidad de este tipo de soluciones permanece abierto.

Para la prueba de este teorema se precisan varios lemas que incluimos a continuación.

Lema 2.3. *Para todo $\kappa \in \mathbb{R}$ existe una solución analítica local $W(\zeta; \kappa)$ del problema (2.1) definida en un entorno a la izquierda de $\zeta = 1$.*

Prueba. Sigue las mismas ideas del lema II.2.1. \square

Lema 2.4. *Si $W(\zeta; \kappa)$ es una solución local de (2.1) en un entorno a la izquierda de $\zeta = 1$, entonces*

- (i) $W''(1^-; \kappa) = 0$;
- (ii) $W'''(1^-; \kappa) = 2m|\kappa|/(2m-1)$;

Prueba. (i) Es fácil ver que $W'(1^-; \kappa) = -1$. Por otra parte tenemos que

$$(2.2) \quad H' + \frac{W'H}{(m-1)W} = -\frac{m|\kappa|W}{m-1} + \frac{m}{m-1},$$

donde ahora $H = W' + \zeta$. Multiplicamos por $W^{1/(m-1)}$, integramos en $(\zeta, 1)$ y dividimos por $W^{m/(m-1)}$ obteniendo la siguiente expresión:

$$\frac{H}{W} = \frac{m}{(m-1)W^{m/(m-1)}} \int_{\zeta}^1 W^{1/(m-1)} (|\kappa|W - 1) d\zeta.$$

Hacemos $\zeta \rightarrow 1^-$ utilizando la regla de l'Hôpital y obtenemos

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1^-} \frac{H(\zeta)}{W(\zeta)} = -1.$$

Si ahora hacemos $\zeta \rightarrow 1^-$ en la ecuación (2.1.a) utilizando este resultado, obtenemos que

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1^-} W''(\zeta) = 0.$$

(ii) Derivando (2.1.a) obtenemos

$$W''' + \frac{W''H}{(m-1)W} - \frac{H}{m-1} \frac{W'^2}{W^2} + \frac{(W''+1)W'}{m-1} \frac{1}{W} + \frac{|\kappa|m}{m-1} W' = 0.$$

Combinando esta igualdad con la ecuación (2.1.a), se tiene que

$$(2.3) \quad W''' = -\frac{HW''}{(m-1)W} + \frac{mW'(-2|\kappa|W - W'')}{(m-1)W}.$$

Utilizando la regla de l'Hôpital obtenemos que

$$W'''(1^-) = \frac{2m|\kappa|}{m-1} - \frac{mW'''(1^-)}{m-1},$$

de donde se sigue (ii). \square

Lema 2.5. Sea W una solución local de (2.1) en un entorno a la izquierda de $\zeta = 1$ que se puede extender hasta $\zeta = 0$. Si $W' < 0$ en $(0, 1)$, entonces $W'' \leq 0$ en $[0, 1]$.

Observación. Gracias al lema 2.1 este resultado es en particular aplicable a las soluciones del problema (2.1).

Prueba. El lema anterior garantiza que hay un pequeño entorno a la izquierda de $\zeta = 1$ donde $W'' < 0$. Supongamos que W'' se hace positivo en $(0, 1)$. Entonces existe $\bar{\zeta} \in (0, 1)$, tal que $W''(\bar{\zeta}) = 0$, $W'''(\bar{\zeta}) \leq 0$. Por (2.3) vemos que en $\bar{\zeta}$

$$W''' = -\frac{2m|\kappa|}{m-1} W' > 0,$$

en contradicción con la hipótesis. \square

Lema 2.6. Sea W una solución local de (2.1) en un entorno a la izquierda de $\zeta = 1$ que se puede extender hasta $\zeta = 0$. Si $W' < 0$ en $(0, 1)$, entonces $H \leq 0$ en $[0, 1]$.

Prueba. Sabemos que $H(0) = W'(0) \leq 0$ y $H(1) = 0$. Además, $H'(1^-) = 1 > 0$. Por consiguiente, si $H > 0$ para algún $\bar{\zeta}$ con $0 < \bar{\zeta} < 1$, entonces hay un primer cero, ζ_0 , a la izquierda de $\bar{\zeta}$ y un primer cero, ζ_1 , a la derecha de $\bar{\zeta}$, verificándose que $H'(\zeta_0) \geq 0$ y $H'(\zeta_1) \leq 0$. Utilizando (2.2) tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq H'(\zeta_0) &= -\frac{m|\kappa|W(\zeta_0)}{m-1} + \frac{m}{m-1}, \\ 0 \geq H'(\zeta_1) &= -\frac{m|\kappa|W(\zeta_1)}{m-1} + \frac{m}{m-1}, \end{aligned}$$

lo que implica que

$$W(\zeta_0) \leq \frac{1}{|\kappa|} \quad \text{y} \quad W(\zeta_1) \geq \frac{1}{|\kappa|},$$

contradiciendo la monotonía estricta de W . \square

Prueba del teorema 2.2. Procediendo como en los teoremas 1.2 y III.1.6 la demostración se reduce a encontrar una cota inferior positiva e independiente de κ para

$$\left(\int_0^1 W^{1/(m-1)} d\zeta \right)^{m-1},$$

donde W está en las hipótesis del lema 2.6. Éste asegura que $W' \leq -\zeta$. Integrando esta desigualdad en $(0, 1)$ tenemos que $W(0) \geq 1/2$. Utilizando la concavidad de W en $(0, 1)$ llegamos a

$$W(\zeta) \geq \frac{1}{2}(1 - \zeta).$$

De esta forma

$$\left(\int_0^1 W^{1/(m-1)} d\zeta \right)^{m-1} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{m-1}{m} \right)^{m-1} > 0. \quad \square$$

Los resultados numéricos muestran que el valor de κ para el cual hay una solución del problema (2.1) coincide con el valor de las asíntotas de las ramas de soluciones de los tipos (T1) y (T2). No obstante, esto no se ha probado aún de forma rigurosa. Obsérvese, sin embargo, que después del cambio de variable $W = mf^{m-1}/(m-1)(1-\mu)$ para soluciones autosemejantes del primer tipo, y del cambio $W = mf^{m-1}/(m-1)(\mu-1)$ para soluciones del tipo (T2), la función presión W es en los tres casos solución del mismo problema de autovalores,

$$\begin{cases} W'' + \frac{1}{m-1} \frac{W'}{W} (W' + \zeta) + \frac{\gamma}{m-1} - \frac{\kappa m}{m-1} W = 0 & \text{si } 0 < \zeta < 1, \\ W > 0 & \text{si } 0 \leq \zeta < 1, \\ W'(0) = 0, W(1) = 0 \text{ y } W'(1) = -1, \end{cases}$$

con $\gamma = \mu/(1 - \mu) > -1$ en el primer caso, $\gamma < -1$ en el segundo y $\gamma = -1$ en el caso exponencial. Los resultados de este capítulo y de los dos anteriores prueban que este problema tiene solución para todo $\gamma \in \mathbb{R}$. En la figura 2 representamos γ frente a κ en el caso $m = 3/2$. Se observa que la función $\gamma(\kappa)$ es continua y monótona para $\kappa > -\pi^2$. Nótese que la curva se interrumpe en $\kappa = -\pi^2$.

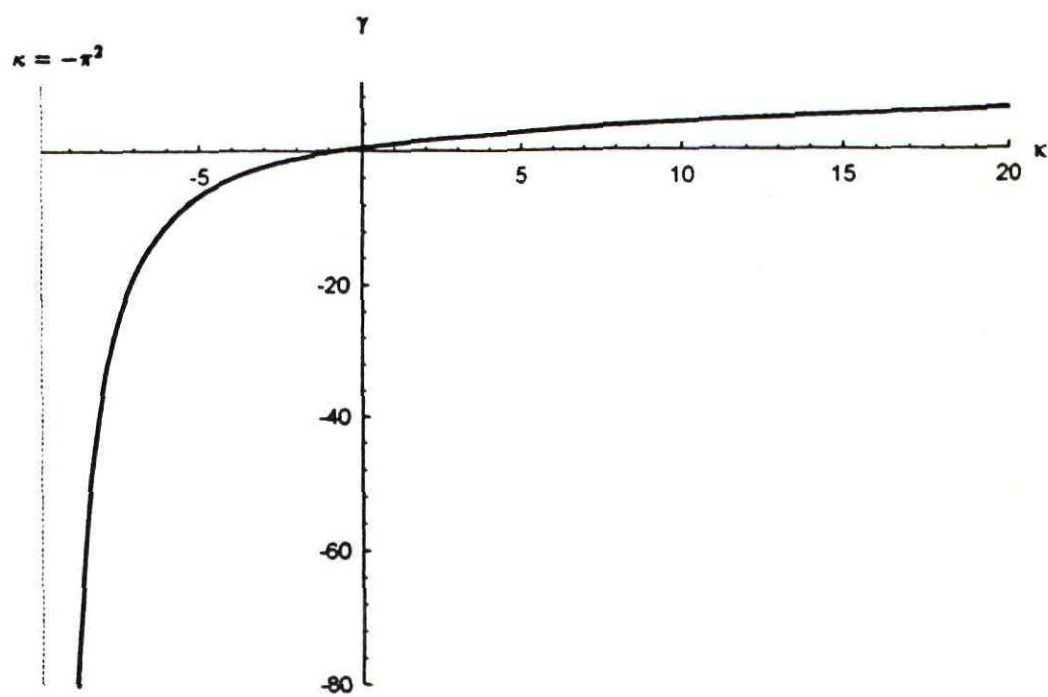


FIGURA 2. γ frente a κ para $m = 3/2$.

CAPÍTULO V

EL PROBLEMA UNIDIMENSIONAL: REGULARIDAD DE LAS SOLUCIONES Y DE LA FRONTERA LIBRE

En este capítulo estudiamos distintas propiedades de las soluciones generales del problema de Cauchy para la ecuación de los estallidos turbulentos (I.1). El cambio de la variable temporal

$$(1) \quad d\tau = l(t)dt, \quad \tau(0) = 0,$$

nos permite considerar la ecuación

$$u_\tau = \Delta u^m - \frac{ku^m}{r^2(\tau)},$$

donde $r(\tau) = l(t)$ es la interfase expresada en términos del nuevo tiempo τ . Trabajaremos con esta última ecuación. Los resultados se pueden traducir a la ecuación de los estallidos turbulentos (I.1) utilizando la fórmula

$$dt = \frac{d\tau}{r(\tau)},$$

inversa de (1), para recuperar el tiempo original. Nos restringiremos a dimensión espacial $n = 1$. Por consiguiente, la ecuación que finalmente vamos a estudiar es

$$(2) \quad u_t = (u^m)_{xx} - \frac{ku^m}{r^2(t)} \quad \text{si } (x, t) \in S = \mathbb{R} \times (0, \infty),$$

donde hemos renombrado τ como t .

En la sección 1 consideramos la ecuación de difusión con absorción

$$u_t = (u^m)_{xx} - h(t)u^m,$$

donde $h(t)$ es una función continua y no negativa dada, y establecemos diversas propiedades concernientes a la regularidad de las soluciones y de la frontera libre. Utilizamos estos resultados en la sección 2, tomando $h(t) = k/r^2(t)$, para obtener las propiedades correspondientes para soluciones de la ecuación (2) como corolario del teorema de existencia y unicidad de Kamin y Vázquez [KV].

Una de las propiedades que obtendremos, la semiconvexidad de la presión, es fundamental a la hora de estudiar el límite $m \downarrow 1$. En particular, se usa en el capítulo VI para probar la convergencia de soluciones generales de (2) a soluciones de una ecuación de tipo Hamilton-Jacobi, y en el capítulo VII en el estudio de la convergencia de las soluciones autosemejantes de (1.1).

Queremos hacer notar finalmente que todos los resultados de la sección 1 se pueden extender sin dificultad a la ecuación

$$u_t = (u^m)_{xx} - h(t)u^p,$$

con $p \geq m > 1$. El caso particular en que $h(t)$ es constante, que inspira gran parte de este capítulo, es estudiado por Herrero y Vázquez en [HV].

1. Una ecuación del calor no lineal con absorción

1.1 Preliminares. En esta sección examinamos algunas propiedades de las soluciones de la ecuación

$$(1.1) \quad u_t = (u^m)_{xx} - h(t)u^m, \quad m > 1,$$

donde $h(t)$ es una función continua y no negativa dada. Consideramos el problema de Cauchy para la ecuación (1.1) en $S = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ con la condición inicial

$$(1.2) \quad u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

donde u_0 es una función acotada, continua y no negativa.

En primer lugar introducimos un concepto adecuado de solución débil para el problema de Cauchy (1.1)–(1.2).

Definición 1.1. Se dice que una función $u(x, t)$ continua, no negativa y acotada en $\bar{S} = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ es una solución débil del problema (1.1)–(1.2) si:

- (i) $u(x, 0) = u_0(x)$;
- (ii) u satisface la identidad

$$I(u, \phi) \equiv \iint_S (u\phi_t + u^m\phi_{xx} - h(t)u^m\phi) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(x, 0) dx = 0$$

para toda función $\phi(x, t) \in C^{2,1}(\bar{S})$ con soporte compacto en \bar{S} .

Cuando una función $u(x, t)$ como las anteriores satisface $I(u, \phi) \leq 0$ (respectivamente $I(u, \phi) \geq 0$) para toda función test no negativa ϕ como antes, decimos que u es una *supersolución* de (1.1)–(1.2) (respectivamente una *subsolución*).

La siguiente proposición da una definición equivalente que será útil más adelante.

Proposición 1.2. Una función $u(x, t)$ es una solución débil del problema (1.1)–(1.2) si y sólo si:

- (i) u es continua, no negativa y acotada en \bar{S} ;
- (ii) $u(x, 0) = u_0(x)$;
- (iii) para cualesquiera números t_0, t_1, x_0, x_1 con $t_0 < t_1, x_0 < x_1$ y tales que el conjunto $P = (t_0, t_1) \times (x_0, x_1) \subset \bar{S}$, y para toda función $\phi \in C^{2,1}(\bar{P})$ tal que ϕ se anula cuando $x = x_0, x = x_1$, se verifica que $\tilde{I}(u, \phi, P) = 0$, donde

$$\tilde{I}(u, \phi, P) \equiv \iint_P (u\phi_t + u^m \phi_{xx} - h(t)u^m \phi) dx dt - \int_{x_0}^{x_1} u\phi|_{t_0}^{t_1} dx - \int_{t_0}^{t_1} u^m \phi_x|_{x_0}^{x_1} dt.$$

Prueba. La implicación si es trivial. Probemos la otra. Sea u una solución débil de (1.1)–(1.2). Obviamente satisface (i) y (ii). Veamos que también satisface (iii).

Empezamos considerando el caso en que $t_0 = 0$. Sea $\phi \in C^{2,1}(\bar{P})$. Hay una función $\tilde{\phi} \in C^{2,1}(\bar{S})$ tal que $\phi = \tilde{\phi}|_{\bar{P}}$. Sea $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ con $\text{sop } \rho \subset B(0, 1)$, $\rho \geq 0$, $\int \rho = 1$ y sea $\rho_n(s) = n\rho(ns)$. Consideramos

$$\zeta_n(t) = \int_{t-t_1}^{\infty} \rho_n(s) ds, \quad \psi_k(x) = \int_{x-x_1}^{\infty} \rho_k(s) ds - \int_{-\infty}^{x_0-x} \rho_k(s) ds.$$

La función $\psi = \tilde{\phi}\zeta_n\psi_k$ es una función *test* admisible para la definición 1.1 y, por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_P \zeta_n \psi_k (u\tilde{\phi}_t + u^m \tilde{\phi}_{xx} - h u^m \tilde{\phi}) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \tilde{\phi}(x, 0) \psi_k(x) dx = \\ - \iint_P u \tilde{\phi} \zeta_{nt} \psi_k dx dt - \int_P u^m \tilde{\phi}_x \zeta_n \psi_{kx} dx dt - \iint_P u^m \zeta_n (\tilde{\phi} \psi_{kx})_x dx dt. \end{aligned}$$

Haciendo $n \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$ obtenemos $\tilde{I}(u, \phi, P) = 0$.

La única dificultad, que vemos a continuación con detalle, está en probar que el último término del segundo miembro tiende a cero. Después de pasar al límite $n \rightarrow \infty$ obtenemos para este término

$$- \int_0^{t_1} \int_{x_0-1/k}^{x_0} u^m (\tilde{\phi} \psi_{kx})_x dx dt - \int_0^{t_1} \int_{x_1}^{x_1+1/k} u^m (\tilde{\phi} \psi_{kx})_x dx dt.$$

Nos concentramos en el sumando

$$A_k = - \int_0^{t_1} \int_{x_1}^{x_1+1/k} u^m (\tilde{\phi} \psi_{kx})_x dx dt.$$

El otro se trata de la misma forma. Nótese que $\int_{x_1}^{x_1+1/k} (\tilde{\phi}\psi_{kx})_x dx = 0$. Por consiguiente,

$$A_k = - \int_0^{t_1} \int_{x_1}^{x_1+1/k} (u^m(x, t) - u^m(x_1, t)) (\tilde{\phi}\psi_{kx})_x dx dt.$$

La función u es uniformemente continua en el compacto $K = [0, t_1] \times [x, x_1 + 1]$. En consecuencia, dado $\varepsilon > 0$ existe un cierto k_0 tal que, si $x_1 \leq x \leq x_1 + 1/k_0$, entonces $|u^m(x, t) - u^m(x_1, t)| \leq \varepsilon$. Así pues, tomando $k \geq k_0$,

$$|A_k| \leq \varepsilon \int_0^{t_1} \int_{x_1}^{x_1+1/k} |(\tilde{\phi}\psi_{kx})_x| dx dt.$$

Para probar que $A_k \rightarrow 0$ basta con verificar que $B_k = \int_0^{t_1} \int_{x_1}^{x_1+1/k} |(\tilde{\phi}\psi_{kx})_x| dx dt \leq C$, con C independiente de k . Ahora bien, si $x_1 \leq x \leq x_1 + 1/k$,

$$\begin{aligned} |(\tilde{\phi}\psi_{kx})_x| &\leq |\tilde{\phi}_x|\rho_k + k^2|\tilde{\phi}||\rho'(k(x - x_1))| = \\ &|\tilde{\phi}_x|\rho_k + k^2 \left| \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}(x_1, t)(x - x_1) + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2}(\bar{x}, t)(x - x_1)^2 \right| |\rho'(k(x - x_1))|, \end{aligned}$$

donde \bar{x} es un punto intermedio que depende tanto de x como de t . No obstante, tanto $|\tilde{\phi}_x|$ como $|\tilde{\phi}_{xx}|$ están acotadas en K . Así,

$$|(\tilde{\phi}\psi_{kx})_x| \leq |\tilde{\phi}_x|\rho_k + k^2\tilde{C}|x - x_1| |\rho'(k(x - x_1))|.$$

Así pues,

$$B_k \leq t_1 \sup_K |\tilde{\phi}_x| + \tilde{C}t_1 \int_0^1 |\xi| |\rho'(\xi)| d\xi = C.$$

La prueba en el caso $t_0 > 0$ es la misma salvo por el hecho de que ahora tomamos como función de corte en tiempo

$$\zeta_n(t) = \int_{t-t_1}^{\infty} \rho_n(s) ds - \int_{-\infty}^{t_0-t} \rho_n(s) ds. \quad \square$$

La existencia, unicidad y propiedades de las soluciones débiles se estudian en el siguiente teorema, que sigue las ideas de Kalashnikov [K], Kersner [Ke] y Herrero y Vázquez [HV] para el caso con $h(t)$ constante.

Teorema 1.3. *Sea $m > 1$, y sean $h(t)$ y $u_0(x)$ funciones acotadas, continuas y no negativas. Entonces:*

- A) *existe una única solución débil $u(x, t)$ de (1.1)–(1.2);*
- B) *si \bar{u} es una supersolución y \underline{u} una subsolución de (1.1) con datos iniciales \bar{u}_0 y \underline{u}_0 respectivamente, y $\bar{u}_0 \geq \underline{u}_0$ entonces $\bar{u} \geq \underline{u}$ en S ;*
- C) *si h es regular, entonces u es regular en el conjunto abierto $\{(x, t) : u(x, t) > 0\}$.*

Prueba. A) EXISTENCIA. Consideramos la familia de problemas de Cauchy aproximados

$$(1.3) \quad \begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} - h_\varepsilon(t)u^m + h_\varepsilon(t)\varepsilon^m & \varepsilon > 0, \\ u(x, 0) = u_{0\varepsilon}(x), \end{cases}$$

donde $\{u_{0\varepsilon}\}$ es una sucesión de funciones regulares, positivas y uniformemente acotadas, $0 < \varepsilon \leq u_{0\varepsilon}(x) \leq M$, que converge a u_0 uniformemente sobre compactos, y $\{h_\varepsilon\}$ una sucesión de funciones regulares, no negativas, uniformemente acotadas que converge a h uniformemente sobre compactos. Es fácil ver que (1.3) tiene para cada ε una única solución clásica acotada en S que, además, satisface $\varepsilon \leq u_\varepsilon \leq M$ (véase [Ke]). El lema siguiente, que emplea el método de Bernstein, es básico para construir las soluciones generalizadas del problema (1.1)–(1.2).

Lema 1.4. *Sea $u_\varepsilon(x, t)$ una solución del problema (1.3). La correspondiente presión $v_\varepsilon \equiv mu_\varepsilon^{m-1}/(m-1)$ satisface*

$$(1.4) \quad v_{\varepsilon x}^2(x, t) \leq \frac{2}{m} \|v_\varepsilon(x, 0)\|_\infty t^{-1}.$$

Además, para $0 \leq t_1 < t_2$,

$$(1.5) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |v_{\varepsilon x}(x, t_2)| < \sup_{x \in \mathbb{R}} |v_{\varepsilon x}(x, t_1)|.$$

Prueba. Suprimimos temporalmente el subíndice ε . Sea $\alpha(v) = ((m-1)v/m)^{1/(m-1)}$. Entonces v satisface

$$(1.6) \quad v_t = (m-1)vv_{xx} + v_x^2 - \frac{h(t)\alpha^m(v)}{\alpha'(v)} + \frac{h(t)\varepsilon^m}{\alpha'(v)}.$$

Escribimos $S_T = \mathbb{R} \times (0, T]$ con $T > 0$. Sea $N = \sup_{x \in S_T} v(x, t)$. Escogemos una función de clase C^2 , $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, N]$, estrictamente creciente, cóncava y tal que $(\phi''/\phi')' \leq 0$; daremos otras especificaciones más adelante. Tomamos también una función de corte $\zeta \in C(\bar{S}_T) \cap C^\infty(S_T)$ tal que $0 \leq \zeta \leq 1$ y $\zeta = 0$ para $t = 0$ o $|x| \geq c$, siendo c una constante positiva. Haciendo $w = \phi(w)$ obtenemos de (1.6)

$$w_t = (m-1)\phi w_{xx} + \left((m-1)\phi \frac{\phi''}{\phi'} + \phi' \right) w_x^2 - \frac{h(t)\alpha^m(\phi)}{\alpha'(\phi)\phi'} + \frac{h(t)\varepsilon^m}{\alpha'(\phi)\phi'}.$$

Derivamos con respecto a x , multiplicamos por $w_x \zeta^2$ y consideramos un punto (x_0, t_0) de S_T en el que la función $z = \zeta^2 w_x^2$ alcance un máximo, de tal forma que tenemos $z_t \geq 0$, $z_x = 0$, $z_{xx} \leq 0$ en (x_0, t_0) (a menos que $z \equiv 0$, un caso que podemos descartar). Se sigue que en un punto tal

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \left(-m\phi'' - (m-1)\phi \left(\frac{\phi''}{\phi'} \right)' \right) \zeta^2 w_x^4 &\leq - \left((m+1)\phi' + 2(m-1)\phi \frac{\phi''}{\phi'} \right) \zeta \zeta_x w_x^3 \\ &+ \left(\zeta \zeta_t + 2(m-1)\phi \zeta_x^2 - (m-1)\phi \zeta \zeta_{xx} - \zeta^2 h(t) \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\alpha^m(\phi(w)) - \varepsilon^m}{\alpha'(\phi(w))\phi'(w)} \right) \right) w_x^2. \end{aligned}$$

Sea

$$H(w) = \frac{\alpha^m(\phi(w)) - \varepsilon^m}{\alpha'(\phi(w))\phi'(w)}.$$

Mostraremos que $\frac{\partial H}{\partial w} \geq 0$ cuando $w > 0$, es decir,

$$(1.8) \quad m\alpha^{m-1}\alpha'^2\phi'^2 - (\alpha^m - \varepsilon^m)(\alpha''\phi'^2 + \alpha'\phi'') \geq 0.$$

Recordemos que $u = \alpha(\phi(w))$ y $u \geq \varepsilon$ en S_T . Por consiguiente, $\alpha^m \geq \varepsilon^m$ en el punto en cuestión. Si $\alpha'' \leq 0$, entonces se satisface (1.8). Si, por el contrario, $\alpha'' > 0$, para que se satisfaga (1.8) es suficiente que

$$(1.9) \quad mu^{m-1}\alpha'^2 \geq u^m\alpha''.$$

Tomando en cuenta que

$$mu^{m-1}\alpha'^2 = \frac{m}{(m-1)^2}u^{3-m} \quad \text{y} \quad u^m\alpha'' = \frac{2-m}{(m-1)^2}u^{3-m},$$

obtenemos que la desigualdad (1.9) es equivalente a $m \geq 2 - m$, lo que se cumple trivialmente. Así pues, $\frac{\partial H}{\partial w} \geq 0$, y el correspondiente término en el lado derecho de (1.7) se puede omitir.

Definimos

$$a_1 = \max |\zeta_t|, \quad a_2 = \max |\zeta_x|, \quad a_3 = \max |\zeta_{xx}|,$$

y suponemos que hay constantes positivas b_i , $i = 1, \dots, 4$ tales que

$$(1.10) \quad 0 < Nb_1 \leq \phi' \leq Nb_2, \quad \phi'' \leq -Nb_3, \quad |\phi''/\phi'| \leq b_4.$$

Tenemos entonces que

$$\zeta^2 w_x^4 \leq c_1 w_x^2 + c_2 \zeta |w_x|^3,$$

donde

$$c_1 = \frac{1}{Nmb_3}(a_1 + N(m-1)a_3 + 2N(m-1)a_2^2),$$

$$c_2 = \frac{a_2}{mb_3}((m+1)b_2 + 2(m-1)b_4).$$

Dado que para todo $\delta > 0$ se tiene que $c_2 \zeta |w_x|^3 \leq \delta \zeta^2 w_x^4 + c_2^2 w_x^2 / 4\delta$, llegamos a

$$(1 - \delta)\zeta^2 w_x^4 \leq \left(c_1 + \frac{c_2^2}{4\delta}\right) w_x^2.$$

Por consiguiente, para todo $(x, t) \in S_T$ tenemos

$$(1.11) \quad z(x, t) \leq \max z \leq \frac{1}{1 - \delta} \left(c_1 + \frac{c_2^2}{4\delta}\right).$$

Como esta cota depende de ζ y ϕ , fijamos un punto $(x_1, t_1) \in S_T$ y elegimos adecuadamente dichas funciones. Empezamos con ζ . Escogemos

$$\zeta_n(x, t) = \frac{t}{t_1} \psi\left(\frac{x - x_1}{n}\right),$$

donde $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ satisface $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ y $\psi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$. Introduciendo ζ_n en (1.7) obtenemos (1.11) con constantes c_{1n} , c_{2n} dependientes de a_{1n} , a_{2n} , a_{3n} . Pero $a_{1n} = 1/t_1$ y $a_{2n}, a_{3n} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Así, pasando al límite en (1.11) obtenemos

$$w_x^2(x_1, t_1) = z(x_1, t_1) \leq \frac{1}{Nmb_3t_1}$$

y, recordando que $v_x = \phi'(w)w_x$ y que $x_1, t_1 > 0$ eran arbitrarios, llegamos a

$$(1.12) \quad v_x^2(x, t) \leq \frac{Nb_2^2}{mb_3t} \quad \text{para todo } (x, t) \in S_T.$$

Escogemos ahora una función ϕ adecuada. Con este fin consideramos la función más simple que satisface $(\phi''/\phi)' \leq 0$ y (1.10), concretamente

$$\phi(r) = Nr(a - br), \quad a, b > 0.$$

Entonces $\phi(1) \geq N$ si $a \geq b + 1$, ϕ es estrictamente creciente en $[0, 1]$ si $a \geq 2b$ y tenemos que $b_2 = a$, $b_3 = 2b$. De esta forma (1.12) pasa a ser

$$(1.13) \quad v_x^2(x, t) \leq \frac{Na^2}{2mbt}.$$

Minimizamos el segundo miembro con respecto a a y b , con las restricciones $a, b > 0$, $a \geq b + 1$ y $a \geq 2b$. El mínimo se alcanza para $a = 2$, $b = 1$, valores para los cuales (1.13) produce (1.4).

Para probar (1.5) suponemos que $t_1 = 0$ y que $w \in C(\overline{S_T})$ desplazando el origen de tiempos. Nótese que aunque esta traslación modifica h , no altera su signo, que es lo único importante en lo que sigue. Se repite entonces el argumento anterior, tomando ahora

$$\zeta_n(x, t) = \psi\left(\frac{x - x_1}{n}\right),$$

para concluir que en un punto de máximo interior de w_x^2 se tiene que $w_x = 0$, de modo que el máximo se alcanza en $t = 0$. \square

Gracias al lema 1.4 tenemos la cota uniforme

$$|(u_\varepsilon^{m-1})_x| \leq C(\tau) \text{ si } t \geq \tau,$$

y, por tanto, las funciones u_ε son Hölder continuas con respecto a x uniformemente en $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}$ y $t \geq \tau > 0$, con exponente $\alpha = \min(1, 1/(m-1))$. Usando los resultados de [Gi] obtenemos que $\{u_\varepsilon\}$ es también uniformemente Hölder continua en t con exponente $\alpha/2$. Damos una prueba directa y simple de este hecho en el siguiente lema:

Lema 1.5. La familia de presiones $\{v_\epsilon\}$ es uniformemente Hölder continua con respecto a t en $S_\tau \equiv \{(x, t) \in S : t > \tau\}$, $\tau > 0$, con exponente $1/2$. Más concretamente: para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t_1 \geq t_0 \geq \tau > 0$ tenemos

$$(1.14) \quad |v_\epsilon(x, t_1) - v_\epsilon(x, t_0)| \leq (8(m-1))^{1/2} M^{1/2} L_\tau (t_1 - t_0)^{1/2} + 2|m-2|L_\tau^2(t_1 - t_0),$$

donde M es una cota superior uniforme para v_ϵ y $L_\tau = 2M/(m\tau)$ es la constante Lipschitz uniforme con respecto a x para v_ϵ en S_τ que se obtuvo en el lema 1.4.

Observación. El resultado sigue siendo válido para cualquier otra constante Lipschitz uniforme, L_τ , que podamos obtener para v_ϵ .

Prueba. Recordemos que $v_\epsilon \in C^\infty(S)$. Por conveniencia, suprimimos temporalmente el subíndice ϵ . Si x_1, t_1, t_0 y τ son como antes, se sigue de que $|v_x| \leq L_\tau$ en S_τ , que para todo $y \in \mathbb{R}$ tal que $|y - x| \leq \lambda$,

$$(1.15) \quad |v(y, t_i) - v(x, t_i)| \leq L|y - x| \leq L\lambda,$$

donde $L = L_\tau$. Queremos estimar $\varrho = v(x, t_1) - v(x, t_0)$ en términos de $\delta = t_1 - t_0$. Suponemos que $\varrho > 0$ (el caso $\varrho < 0$ se trata de forma análoga). Tomamos entonces $\lambda < \varrho/(2L)$ y hacemos $I = [x - \lambda, x + \lambda]$ y $Q = I \times [t_0, t_1]$. Reescribimos la ecuación para la presión (1.6) como

$$v_t = (m-1)(vv_x)_x - (m-2)v_x^2 - \frac{h(t)(\alpha^m(v) - \epsilon^m)}{\alpha'(v)}$$

e integramos en Q para obtener

$$(1.16) \quad \int_I (v(y, t_1) - v(y, t_0)) dy = (m-1) \int_{t_0}^{t_1} ((vv_x)(x + \lambda, t) - (vv_x)(x - \lambda, t)) dt \\ - (m-2) \iint_Q v_x^2(y, t) dy dt - \iint_Q \frac{h(t)(\alpha^m(v) - \epsilon^m)}{\alpha'(v)} dy dt.$$

En vista de (1.15) tenemos

$$v(y, t_1) - v(y, t_0) \geq v(x, t_1) - v(x, t_0) - 2L\lambda = \varrho - 2L\lambda.$$

Recordando que $\alpha(v) = u \geq \epsilon$, vemos que el último término del lado derecho de (1.16) es negativo. Por tanto, tomando en cuenta que $v \leq M$ obtenemos

$$2\lambda(\varrho - 2L\lambda) \leq 2(m-1)ML\delta - (m-2)L^22\lambda\delta.$$

Si ahora hacemos $\lambda = \varrho/(4L)$, llegamos a

$$\varrho^2 \leq 8(m-1)ML^2\delta - 2(m-2)L^2\varrho\delta,$$

de donde se sigue que

$$\varrho \leq 2|m - 2|L^2\delta + (8(m - 1))^{1/2}M^{1/2}L\delta^{1/2}. \quad \square$$

CONTINUACIÓN DE LA PRUEBA DEL TEOREMA 1.3. Gracias a los lemas 1.4 y 1.5 tenemos que hay una subsucesión, a la que también llamamos u_ε , que converge a una función continua $u(x, t)$ uniformemente sobre compactos de S y, por tanto, para todo $(x, t) \in S$. Dado que

$$I(u_\varepsilon, \phi) = \iint (h_\varepsilon(t) - h(t))u_\varepsilon^m(x, t)\phi(x, t) dx dt - \varepsilon^m \iint h_\varepsilon(t)\phi(x, t) dx dt,$$

en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos $I(u, \phi) = 0$.

Tenemos que comprobar que u es continua hasta $t = 0$ y que $u(x, 0) = u_0(x)$. Los resultados clásicos para ecuaciones parabólicas casi lineales [LSU] no se pueden aplicar directamente debido a la degeneración de la ecuación.

Consideramos en primer lugar un punto x_0 para el cual $u_0(x_0) > 0$. Construimos una barrera inferior explícita para u_0 en x_0 como sigue: dado $0 < \delta < u_0(x_0)$ hay un intervalo $I = [x_0 - a, x_0 + a]$ en el que $u_0(x) \geq u_0(x_0) - \delta \equiv b > 0$. Consideramos la función

$$\tilde{v}(x, t) = B - \frac{B}{a^2}(x - x_0)^2 - ct,$$

con $B = mb^{m-1}/(m - 1)$ y $c > 0$, en el conjunto

$$\Omega = \{(x, t) \in S : B > \frac{B}{a^2}(x - x_0)^2 + ct\}.$$

Si $c > (2B^2(m - 1)/a^2) + (H(m - 1)^2B^2/m)$, donde H es una cota superior uniforme para las funciones $h_\varepsilon(t)$, entonces \tilde{v} satisface en Ω la desigualdad

$$L_{1\varepsilon}\tilde{v} \equiv \tilde{v}_t - (m - 1)\tilde{v}\tilde{v}_{xx} - \tilde{v}_x^2 + \frac{(m - 1)^2h_\varepsilon(t)\tilde{v}^2}{m} < 0.$$

Podemos llevar a cabo el cambio de variables $\tilde{v} = m\tilde{u}^{m-1}/(m - 1)$. Entonces $\tilde{u} \in C^\infty(\Omega)$ y satisface en Ω la desigualdad

$$L_\varepsilon\tilde{u} \equiv \tilde{u}_t - (\tilde{u}^m)_{xx} + h_\varepsilon(t)\tilde{u}^m < 0.$$

Es fácil ver que para ε pequeño las aproximaciones u_ε construidas más arriba satisfacen: (i) $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$, (ii) $L_\varepsilon u_\varepsilon > 0$ en Ω , (iii) $u_\varepsilon(x, t) \geq \tilde{u}(x, t)$ en $\partial\Omega$. Por el principio del máximo se sigue que $u_\varepsilon(x, t) \geq \tilde{u}(x, t)$ en Ω . Haciendo $\varepsilon \downarrow 0$ tenemos que $u(x, t) \geq \tilde{u}(x, t)$ en Ω , de donde, como $(x, t) \in S \rightarrow (x_0, 0)$, obtenemos

$$\liminf u(x, t) \geq \tilde{u}(x_0) = u_0(x_0) - \delta.$$

Haciendo $\delta \rightarrow 0$ se sigue la semicontinuidad inferior de u en $(x_0, 0)$. El resultado es obviamente cierto si $u_0(x_0) = 0$, ya que $u \geq 0$.

La semicontinuidad superior en $(x_0, 0)$ es aún más fácil. Dado $\delta > 0$ consideramos $\hat{u}_0(x) = u_0(x) + \delta$. Sea \hat{u} la solución de la ecuación de los medios porosos con dato inicial \hat{u}_0 . Como las funciones u_ε son subsoluciones de dicha ecuación y, además, podemos tomar $u_\varepsilon(x) \leq \hat{u}_0(x)$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $u_\varepsilon(x, t) \leq \hat{u}(x, t)$ en S y, por tanto, $u(x, t) \leq \hat{u}(x, t)$ en S . Pero \hat{u} es continua en $t = 0$. Por consiguiente, cuando $(x, t) \rightarrow (x_0, 0)$ con $(x, t) \in S$, tenemos que

$$\limsup u(x, t) \leq \lim \hat{u}(x, t) = \hat{u}(x_0) \leq u_0(x_0) + \delta.$$

B) UNICIDAD Y COMPARACIÓN. Organizamos la prueba en dos pasos.

Paso 1. Empezamos probando que si $u = \lim u_\varepsilon$ es la solución de (1.1)–(1.2) construida en el apartado A) y \bar{u} es una supersolución con $u_0(x) \leq \bar{u}(x, 0)$, entonces $u(x, t) \leq \bar{u}(x, t)$ en \bar{S} .

En efecto, supongamos que $u > \bar{u}$ en el punto $(\hat{x}, \hat{t}) \in S$. La continuidad de u y \bar{u} asegura que hay un valor $l > 0$ y un intervalo $E = \{t = \hat{t}, \hat{x} - l \leq x \leq \hat{x} + l\}$ tales que $u > \bar{u}$ en E . Debido a las propiedades de la sucesión u_ε , tenemos que $u_\varepsilon > \bar{u}$ en E para ε suficientemente pequeño. Denotamos por $\omega(x)$ a una función infinitamente diferenciable tal que $\text{sop } \omega(x) = [\hat{x} - l, \hat{x} + l]$ y $\omega(x)(u - \bar{u}) > 0$ sobre el intervalo antes mencionado. Si probamos que

$$(1.17) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (u(x, \hat{t}) - \bar{u}(x, \hat{t})) \omega(x) dx \leq 0,$$

llegamos a una contradicción y de ahí se sigue el resultado.

Sea $r > 0$ tal que $r > |\hat{x}| + l$. Hacemos $P = (0, \hat{t}) \times (-r, r)$. Entonces, dado $\phi \in C^{2,1}(\bar{P})$ con $\phi \geq 0$ y $\phi = 0$ si $x = x_0$ o $x = x_1$, empleando la misma técnica que en la prueba de la proposición 1.2 obtenemos que

$$\tilde{I}(u_\varepsilon, \phi, P) + \iint_P (h - h_\varepsilon) u_\varepsilon^m \phi dx dt + \varepsilon^m \iint_P h_\varepsilon \phi dx dt = 0 \quad \text{y} \quad \tilde{I}(\bar{u}, \phi, P) \leq 0,$$

de donde

$$\tilde{I}(\bar{u}, \phi, P) - \tilde{I}(u_\varepsilon, \phi, P) \leq \iint_P (h - h_\varepsilon) u_\varepsilon^m \phi dx dt + \varepsilon^m \iint_P h_\varepsilon \phi dx dt,$$

o lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned}
& \int_{-r}^r (u_\varepsilon(x, \hat{t}) - \bar{u}(x, \hat{t})) \phi(x, \hat{t}) dx \leq \\
& \int_{-r}^r (u_\varepsilon(x, 0) - \bar{u}(x, 0)) \phi(x, 0) dx - \int_0^{\hat{t}} (u_\varepsilon^m - \bar{u}^m) \phi_x \Big|_{x=-r}^{x=r} dt \\
& + \int_0^{\hat{t}} \int_{-r}^r ((u_\varepsilon - \bar{u}) \phi_t + (u_\varepsilon^m - \bar{u}^m) \phi_{xx} - h_\varepsilon (u_\varepsilon^m - \bar{u}^m) \phi) dx dt \\
& + \int_0^{\hat{t}} \int_{-r}^r (h - h_\varepsilon) \bar{u}^m \phi dx dt + \varepsilon^m \int_0^{\hat{t}} \int_{-r}^r h_\varepsilon \phi dx dt.
\end{aligned}$$

Introducimos la notación $A_\varepsilon(x, t) = \int_0^1 a'(\theta u_\varepsilon + (1 - \theta) \bar{u}) d\theta$, con $a(s) = s^m$. Obsérvese que $0 \leq A_\varepsilon(x, t) \leq M_1$. La última desigualdad se transforma en

$$\begin{aligned}
(1.18) \quad & \int_{-r}^r (u_\varepsilon(x, \hat{t}) - \bar{u}(x, \hat{t})) \phi(x, \hat{t}) dx \leq \\
& \int_{-r}^r (u_{0\varepsilon}(x) - \bar{u}(x, 0)) \phi(x, 0) dx + \int_0^{\hat{t}} (\bar{u}^m - u_\varepsilon^m) \phi_x \Big|_{x=-r}^{x=r} dt \\
& + \int_0^{\hat{t}} \int_{-r}^r (u_\varepsilon - \bar{u}) (\phi_t + A_\varepsilon \phi_{xx} - h_\varepsilon A_\varepsilon \phi) dx dt \\
& + \int_0^{\hat{t}} \int_{-r}^r (h - h_\varepsilon) \bar{u}^m \phi dx dt + \varepsilon^m \int_0^{\hat{t}} \int_{-r}^r h_\varepsilon \phi dx dt.
\end{aligned}$$

Construimos dos sucesiones de funciones positivas regulares, $\{A_{\varepsilon k}\}$, $\{\tilde{A}_{\varepsilon k}\}$, con las propiedades siguientes:

- (i) $\{A_{\varepsilon k}\}$ monótonamente decreciente, uniformemente acotada, y uniformemente convergente a A_ε sobre conjuntos compactos cuando $k \rightarrow \infty$;
- (ii) $\{\tilde{A}_{\varepsilon k}\}$ monótonamente creciente y uniformemente convergente a A_ε sobre conjuntos compactos cuando $k \rightarrow \infty$.

Puesto que $a'' > 0$, entonces $a'(\theta u_\varepsilon + (1 - \theta) \bar{u}) \geq a'(\varepsilon \theta)$; por tanto, $A_\varepsilon \geq a(\varepsilon)/\varepsilon = \delta_\varepsilon$ y así tenemos que $A_{\varepsilon k} \geq \delta_\varepsilon$. Por otra parte, $\tilde{A}_{\varepsilon k} \leq A_\varepsilon \leq M_1$. Reescribimos (1.18) en la forma

$$\begin{aligned}
(1.19) \quad & \int_{-r}^r (u_\varepsilon(x, \hat{t}) - \bar{u}(x, \hat{t})) \phi(x, \hat{t}) dx \leq \int_{-r}^r (u_{0\varepsilon}(x) - \bar{u}(x, 0)) \phi(x, 0) dx \\
& + \int_0^{\hat{t}} (\bar{u}^m - u_\varepsilon^m) \phi_x \Big|_{x=-r}^{x=r} dt + \int_0^{\hat{t}} \int_{-r}^r (A_\varepsilon - A_{\varepsilon k}) (u_\varepsilon - \bar{u}) \phi_{xx} dx dt \\
& + \int_0^{\hat{t}} \int_{-r}^r h_\varepsilon (\tilde{A}_{\varepsilon k} - A_\varepsilon) (u_\varepsilon - \bar{u}) \phi dx dt \\
& + \int_0^{\hat{t}} \int_{-r}^r (u_\varepsilon - \bar{u}) (\phi_t + A_{\varepsilon k} \phi_{xx} - h_\varepsilon \tilde{A}_{\varepsilon k} \phi) dx dt \\
& + \int_0^{\hat{t}} \int_{-r}^r (h - h_\varepsilon) \bar{u}^m \phi dx dt + \varepsilon^m \int_0^{\hat{t}} \int_{-r}^r h_\varepsilon \phi dx dt.
\end{aligned}$$

Consideramos el problema de valores de frontera

$$\begin{cases} L\phi \equiv \phi_t + A_{nk}\phi_{xx} - h_\varepsilon \tilde{A}_{\varepsilon k}\phi = 0 & \text{en } P, \\ \phi(x, \hat{t}) = \omega(x), \quad \phi(\pm r, t) = 0. \end{cases}$$

Se sabe de la teoría de ecuaciones parabólicas lineales [F] que este problema tiene solución clásica única $\phi = \phi^{\varepsilon k r}$. Esta solución tiene las siguientes propiedades (véase [Ke, lemas 3-6]):

- (i) $0 \leq \phi(x, t) \leq \max |\omega(x)| = M_2$ en \bar{P} ;
- (ii) dado $\gamma > 1$ existe un número $M_3 = M_3(\gamma)$ tal que $|\phi(x, t)| \leq M_3(1 + |x|)^{-\gamma}$ en P ;
- (iii) dado $\gamma > 1$ existe un número $M_4 = M_4(\gamma)$ tal que $|\phi_x|_{|x|=r} \leq M_4 r^{-\gamma}$;
- (iv) $\int_0^{\hat{t}} \int_{-r}^r (\phi_{xx})^2 dx dt \leq M_5$, con $M_5 = M_5(\varepsilon, r)$ independiente de k .

Sustituimos $\phi = \phi^{\varepsilon k r}$ en (1.19) y aplicamos las propiedades (i)-(iv) con $\gamma = 2$. Por ser $u_0(x) \leq \bar{u}(x, 0)$, se tiene que $u_{0\varepsilon} - \bar{u}(x, 0) \leq u_{0\varepsilon}(x) - u_0(x)$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r (u_\varepsilon(x, \hat{t}) - \bar{u}(x, \hat{t})) \omega(x) dx &\leq \max_{|x| \leq r} |u_{0\varepsilon}(x) - u_0(x)| M_3 \int_{-r}^r \frac{dx}{(1 + |x|)^2} \\ &\quad + r^{-2} M_4 \hat{t} \max_{0 \leq t \leq \hat{t}} |\bar{u}^m(r, t) - u_\varepsilon^m(r, t)| + r^{-2} M_4 \hat{t} \max_{0 \leq t \leq \hat{t}} |\bar{u}^m(-r, t) - u_\varepsilon^m(-r, t)| \\ &+ M_6 \max_{\bar{P}} |A_\varepsilon - A_{\varepsilon k}| \max_{\bar{P}} |u_\varepsilon - \bar{u}| + \max_{0 \leq t \leq \hat{t}} h_\varepsilon \max_{\bar{P}} |\tilde{A}_{\varepsilon k} - A_\varepsilon| \max_{\bar{P}} |u_\varepsilon - \bar{u}| \hat{t} M_3 \int_{-r}^r \frac{dx}{(1 + |x|)^2} \\ &\quad + \max_{0 \leq t \leq \hat{t}} |h - h_\varepsilon| \max_{\bar{P}} \bar{u}^m \hat{t} M_3 \int_{-r}^r \frac{dx}{(1 + |x|)^2} + \varepsilon^m \max_{0 \leq t \leq \hat{t}} h_\varepsilon \hat{t} M_3 \int_{-r}^r \frac{dx}{(1 + |x|)^2}. \end{aligned}$$

Para probar (1.17), tomamos límites, primero $\varepsilon \rightarrow 0$, después $k \rightarrow \infty$ y finalmente $r \rightarrow \infty$.

Paso 2. El segundo paso es probar que, si $u = \lim u_\varepsilon$ es la solución de (1.1)-(1.2) construida en el apartado A) y \underline{u} es una subsolución con $u_0(x) \geq \underline{u}(x, 0)$, entonces $u(x, t) \geq \underline{u}(x, t)$ en \bar{S} . Esto se hace usando la misma técnica empleada en el paso 1.

Una vez probados los pasos 1 y 2, la unicidad y la comparación se obtienen inmediatamente.

C) **REGULARIDAD.** Si h es regular, entonces para los puntos en los que $u(x, t) > 0$ se obtiene la regularidad de $u(x, t)$ por los métodos estándar. \square

1.2 Regularidad de las soluciones. Nuestro primer resultado es una consecuencia fácil de los lemas anteriores.

Teorema 1.6. Sea $u(x, t)$ una solución del problema (1.1)-(1.2). Entonces,

- (i) la presión $v = mu^{m-1}/(m-1)$ es Lipschitz continua en x para cada $t > 0$ y

$$(1.20) \quad v_x^2(x, t) \leq \frac{2}{m} \|v(x, 0)\|_\infty t^{-1} \quad \text{en casi todo punto};$$

(ii) para todo t_1, t_2 con $0 \leq t_1 < t_2$ se tiene

$$(1.21) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |v_x(x, t_2)| < \sup_{x \in \mathbb{R}} |v_x(x, t_1)|.$$

(iii) v es Hölder continua con respecto a t en $S_\tau \equiv \{(x, t) \in S : t > \tau\}$, $\tau > 0$, con exponente $1/2$. De forma más precisa, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t_1 \geq t_0 \geq \tau > 0$ tenemos

$$(1.22) \quad |v(x, t_1) - v(x, t_0)| \leq (8(m-1))^{1/2} M^{1/2} L_\tau (t_1 - t_0)^{1/2} + 2|m-2|L_\tau^2(t_1 - t_0),$$

siendo $M = \|v(x, 0)\|_\infty$ y $L_\tau = 2M/(m\tau)$ la constante Lipschitz uniforme con respecto a x para v en S_τ dada por (1.20).

Prueba. Simplemente hay que pasar al límite en (1.4), (1.5) y (1.14). \square

Del teorema se sigue que u es Hölder continua con exponente $\alpha = \min(1/2, 1/(m-1))$ en S_τ .

Observación. Este teorema proporciona dos cotas diferentes para v_x ; la primera, dada por la fórmula (1.20), no depende de la regularidad de los datos iniciales, pero sólo es útil para t alejado de cero. Por el contrario, la estimación dada por la fórmula (1.21) es válida hasta $t = 0$, pero exige que $v_x(x, 0)$ esté acotada. Si éste es el caso, entonces la fórmula (1.21) nos proporciona una constante Lipschitz uniforme, $L = \sup v_x(x, 0)$, para v en \bar{S} . La validez de la fórmula (1.22) se puede entonces extender fácilmente hasta $t = 0$ con $L_\tau = L$.

Como corolario del teorema 1.6 probamos la dependencia continua de las soluciones tanto del dato inicial u_0 como del coeficiente de absorción h .

Corolario 1.7. Sean $u_j(x, t)$ ($j = 1, 2, \dots$) soluciones de

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} - h_j(t)u^m, \\ u(x, 0) = u_{0j}(x), \end{cases}$$

y $u(x, t)$ una solución de (1.1)–(1.2). Si

- (i) $u_{0j} \rightarrow u_0$ uniformemente sobre compactos y $\{u_{0j}\}$ está uniformemente acotada,
- (ii) $h_j \rightarrow h$ uniformemente sobre compactos y $\{h_j\}$ está uniformemente acotada,

entonces $u_j(x, t) \rightarrow u(x, t)$ uniformemente sobre compactos de S .

Prueba. Por estar las funciones v_{0j} uniformemente acotadas y teniendo en cuenta (1.20) y (1.22), tenemos que la familia $\{u_j\}$ es uniformemente Hölder continua en S_τ con exponente $\alpha = \min(1/2, 1/(m-1))$. Por otra parte, aplicando el principio del máximo obtenemos que la sucesión $\{u_j\}$ está uniformemente acotada. Así, hay una subsucesión $\{u_{j_k}\}$ que converge a una función continua \tilde{u} uniformemente sobre subconjuntos compactos de S y, por tanto, para todo $(x, t) \in S$. Pasando al límite en

$$\iint_S (u_{j_k} \phi_t + u_{j_k}^m \phi_{xx} - h(t)u_{j_k}^m \phi) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_{0j_k}(x) \phi(x, 0) dx = 0$$

obtenemos que \tilde{u} satisface la ecuación (1.1).

Sea x_0 un punto tal que $u_0(x_0) > 0$. Dado δ tal que $0 < \delta < u_0(x_0)$, existe un intervalo $I = [x_0 - a, x_0 + a]$ en el que $u_{0j_k}(x) \geq u_0(x_0) - \delta$ para j_k suficientemente grande. Sea $\hat{u}_0(x)$ una función continua tal que: (i) $\hat{u}_0(x) = 0$ para $x \notin I$, (ii) $\hat{u}_0(x) \leq u_0(x_0) - \delta$ y (iii) $\hat{u}_0(x_0) = u_0(x_0) - \delta$. Sea \hat{u} la solución correspondiente. Comparando obtenemos que $u_{j_k} \geq \hat{u}$ para j_k suficientemente grande y por tanto que $\tilde{u}(x, t) \geq \hat{u}(x, t)$. Por consiguiente, cuando $(x, t) \in S \rightarrow (x_0, 0)$ tenemos que $\liminf \tilde{u}(x, t) \geq \hat{u}(x_0) = u_0(x_0) - \delta$ y, haciendo $\delta \rightarrow 0$, que

$$\liminf \tilde{u}(x, t) \geq u_0(x_0).$$

La desigualdad también es cierta si $u_0(x_0) = 0$, ya que $\tilde{u} \geq 0$.

Por otra parte, dados $\delta > 0$ y un intervalo $I = [x_0 - a, x_0 + a]$, tomando j_k suficientemente grande tenemos que $u_{0j_k}(x) \leq u_0(x) + \delta$ para $x \in I$. Sea $\bar{u}_0(x)$ una función continua tal que: (i) $\bar{u}_0(x) = u_0(x) + \delta$ para $x \in I$, (ii) $\bar{u}_0(x) \geq \sup_{j_k} \{u_{0j_k}(x)\} + \delta$. Sea \bar{u} la solución correspondiente. Comparando, se obtiene que $\bar{u} \geq u_{j_k}$ para j_k suficientemente grande y por tanto que $\bar{u}(x, t) \geq \tilde{u}(x, t)$. Por consiguiente, cuando $(x, t) \in S \rightarrow (x_0, 0)$ tenemos que $\limsup \tilde{u}(x, t) \leq \bar{u}(x_0) = u_0(x_0) + \delta$ y, haciendo $\delta \rightarrow 0$, que

$$\limsup \tilde{u}(x, t) \leq u_0(x_0).$$

Así pues, hemos probado que \tilde{u} es continua hasta $t = 0$ y que $\tilde{u}(x, 0) = u_0(x)$. En consecuencia, \tilde{u} es la solución del problema de Cauchy con dato inicial u_0 , es decir, $\tilde{u} = u$. La unicidad del límite garantiza que toda la sucesión $\{u_j\}$ converge a u uniformemente sobre subconjuntos compactos de S . \square

Un segundo resultado de regularidad importante dice que, si $h(t)$ es no creciente, la presión es una función semiconvexa con respecto a la variable espacial. La restricción a funciones $h(t)$ no crecientes no es importante para nosotros, ya que éste es el caso relevante para la ecuación de los estallidos turbulentos. Para probar este resultado necesitamos obtener antes algunas estimaciones *a priori*.

Lema 1.8. Sea $u(x, t)$ una solución del problema (1.1)–(1.2). Entonces

$$u(x, t) \leq \left((m-1) \int_0^t h(s) ds \right)^{-1/(m-1)}.$$

Prueba. Esta estimación es una consecuencia de la existencia de una solución de (1.1) de la forma

$$u^*(x, t) = \left((m-1) \int_0^t h(s) ds \right)^{-1/(m-1)}$$

junto con el principio de comparación. \square

Observación. Si $h(t)$ es no creciente, entonces

$$(1.23) \quad u(x, t) \leq ((m-1)th(t))^{-1/(m-1)}.$$

Sea $v = mu^{m-1}/(m-1)$. Combinando el teorema 1.6 y el lema 1.8 obtenemos una cota universal para v_x^2 independiente de v_0 .

Corolario 1.9. Sea u una solución del problema (1.1)–(1.2). Entonces para todo $(x, t) \in S$ la presión $v(x, t)$ satisface

$$|v_x(x, t)|^2 \leq \frac{4}{(m-1)^2 t \int_0^{t/2} h(s) ds}$$

Prueba. Usamos la estimación proporcionada por el lema 1.8 en el intervalo de tiempo $[0, t/2]$ para obtener que $v(x, t/2) \leq m/((m-1)^2 \int_0^{t/2} h(s) ds)$. Aplicamos entonces (1.20) en $[t/2, t]$ después de desplazar el origen de tiempo de 0 a $t/2$. Obsérvese que aunque la ecuación no es invariante bajo traslaciones de tiempo, todavía podemos aplicar la estimación (1.20), ya que es independiente de $h(t)$. \square

Observación. Si $h(t)$ es no creciente, entonces

$$(1.24) \quad |v_x(x, t)|^2 \leq \frac{8}{(m-1)^2 t^2 h(t)}.$$

Teorema 1.10. Sea u una solución del problema (1.1)–(1.2) con $h(t)$ no creciente. Entonces existe una constante universal $C(m) > 0$ tal que

$$(1.25) \quad v_{xx} \geq -\frac{C}{t} \quad \text{en } \mathcal{D}'(S).$$

Observación. En la prueba obtenemos $C(m) = \frac{1 + \sqrt{1 + (64(m+1)/m)}}{2(m+1)}$. Este valor de la constante puede no ser el óptimo.

Prueba. El núcleo de la prueba radica en el siguiente argumento formal: sea u una solución positiva y regular de (1.1). La correspondiente presión v satisface la ecuación

$$(1.26) \quad v_t = (m-1)vv_{xx} + v_x^2 - \frac{(m-1)^2 h(t)v^2}{m}.$$

Siguiendo a Aronson y Bénilan [AB] hacemos $p = v_{xx}$ y derivamos dos veces en (1.26) con respecto a x para obtener

$$(1.27) \quad p_t = (m-1)vp_{xx} + 2mv_x p_x + (m+1)p^2 - \frac{2(m-1)^2}{m} h(t)vp - \frac{2(m-1)^2}{m} h(t)v_x^2.$$

Consideramos ahora el operador diferencial

$$L\theta = (m-1)v\theta_{xx} + 2mv_x\theta_x + (m+1)\theta^2 - \frac{2(m-1)^2}{m}h(t)v\theta - \theta_t.$$

Se sigue de (1.27) y de la estimación (1.24) que

$$Lp = \frac{2(m-1)^2}{m}h(t)v_x^2 \leq \frac{16}{mt^2}.$$

Tomamos ahora $\hat{p}(x, t) = -C/t$ donde $C > 0$ es una constante que determinaremos posteriormente. Se tiene

$$L\hat{p} = (m+1)\frac{C^2}{t^2} + \frac{2(m-1)^2h(t)v}{m}\frac{C}{t} - \frac{C}{t^2} \geq \frac{(m+1)C^2}{t^2} - \frac{C}{t^2}.$$

Así, $L\hat{p} \geq Lp$ en S si

$$(m+1)C^2 \geq C + \frac{16}{m}.$$

El menor valor de C que verifica esta desigualdad es

$$C = \frac{1 + \sqrt{1 + 64(m+1)/m}}{2(m+1)}.$$

Por otra parte, tenemos que $p \geq \hat{p}$ en $t = 0$. Por el principio del máximo se sigue que $p \geq \hat{p} = -C/t$ en S .

Para completar la prueba se necesitan dos argumentos adicionales; el primero, para justificar el uso del principio del máximo para funciones con datos iniciales singulares y el segundo para aplicar el argumento a soluciones que sean sólo no negativas y, por tanto, no necesariamente regulares. Ambos argumentos son estándar (véase por ejemplo [HV]). \square

1.3 La frontera libre. Este apartado está dedicado al estudio de las propiedades de propagación de las soluciones del problema (1.1)–(1.2) bajo las hipótesis

- (H1) $h(t)$ acotada, no negativa, continua y no creciente;
- (H2) u_0 continua, no negativa y acotada, junto con la condición sobre el soporte

$$\sup\{x : u_0(x) > 0\} = d < +\infty.$$

La hipótesis (H2) es la condición natural sobre u_0 para que tenga una interfase por la derecha, $x = \zeta(t)$, definida por $\zeta(t) = \sup\{x \in \mathbb{R} : u(x, t) > 0\}$, $t \geq 0$. Lo primero que probamos es que $\zeta(t)$ es no decreciente.

Teorema 1.11. Si $u(x_0, t_0) > 0$ entonces $u(x_0, t) > 0$ para todo $t \geq t_0$.

Prueba. Consideramos el problema

$$(1.28) \quad \begin{cases} \underline{u}_t = (\underline{u}^m)_{xx} - H\underline{u}^m & \text{si } x \in \mathbb{R}, t > t_0, \\ \underline{u}(x, t_0) = u(x, t_0). \end{cases}$$

donde $H \in \mathbb{R}$ es una cota superior para $h(t)$. Entonces $\underline{u}(x, t)$ es una supersolución de (1.28) para $t \geq t_0$. Por otra parte, la solución de (1.28), $\underline{u}(x, t)$, tiene la propiedad de que su conjunto de positividad se expande, es decir, si $\underline{u}(x_0, t_0) > 0$, entonces $\underline{u}(x_0, t) > 0$ para todo $t > t_0$ (véase [Kn, lema 3.4]). De ahí el resultado. \square

Nuestro próximo objetivo es usar los resultados de regularidad de las secciones precedentes para obtener otras propiedades de la interfase.

Teorema 1.12. (i) $\zeta(t) \in \text{Lip}(0, \infty)$ y (ii) $\zeta(t) \in C[0, \infty)$.

Prueba. Fijamos $t_0 > 0$. Tomamos $0 < \tau < t_0$. La fórmula (1.20) garantiza que existe una constante $C = C(\tau) > 0$ tal que $|v_x(x, t)| \leq C$ para todo $t \geq \tau_0$. Por el teorema del valor medio, para $x < \zeta(t_0)$ tenemos

$$v(x, t_0) = -(\zeta(t_0) - x)v_x(\hat{x}, t_0) \leq C(\zeta(t_0) - x),$$

donde $\hat{x} \in (x, \zeta(t_0))$. Como las soluciones de la ecuación de los medios porosos son supersoluciones de la ecuación (1.1), la primera afirmación se sigue de la comparación en $t \geq t_0$ de v con la solución lineal en presión de dicha ecuación:

$$\tilde{v}(x, t) = C[C(t - t_0) + \zeta(t_0) - x]_+.$$

Para probar que $\zeta(t)$ es continua hasta $t = 0$ basta con observar que la solución de la ecuación de los medios porosos con dato inicial (1.2) es una supersolución de (1.1)–(1.2). La continuidad hasta $t = 0$ de la frontera libre de las soluciones de dicha ecuación produce el resultado. \square

Como en el caso de medios porosos ($h \equiv 0$), probamos que la velocidad de la frontera libre está dada por el gradiente de la presión (la velocidad local).

Teorema 1.13. Sea $u(x, t)$ una solución del problema (1.1)–(1.2) bajo las hipótesis (H1)–(H2). Para todo $t > 0$ existe la derivada por la derecha $D^+\zeta(t)$ y

$$(1.29) \quad D^+\zeta(t) = -v_x(\zeta(t), t),$$

donde $v_x(\zeta(t), t)$ se debe entender como $\lim v_x(x, t)$ cuando $x \rightarrow \zeta(t)$, $x < \zeta(t)$.

Prueba. El argumento de la prueba es paralelo al utilizado para la ecuación

$$u_t = (u^m)_{xx} - \lambda u^p$$

en [HV], siendo los principales ingredientes la semiconvexidad de la presión y la cota superior para u dada por (1.23).

(i) Puesto que $v_{xx} \geq -C/t$ para algún $C > 0$, la función $x \mapsto v(x, t) + Cx^2/2t$ es convexa en \mathbb{R} para todo $t > 0$ y, por tanto, tiene derivadas laterales en cada punto. Por consiguiente, el límite $v_x(\zeta(t), t)$ que aparece en (1.29) existe para cada $t > 0$.

(ii) Para probar (1.29) en $t = t_0 > 0$, consideramos la solución $\hat{u}(x, t)$ del problema

$$(1.30) \quad \begin{cases} \hat{u}_t = (\hat{u}^m)_{xx} & \text{para } x \in \mathbb{R}, t > t_0, \\ \hat{u}(x, t_0) = u(x, t_0) & \text{para } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Está claro que \hat{u} es una supersolución de nuestro problema para $t \geq t_0$, de manera que $\hat{u}(x, t) \geq u(x, t)$ para tales valores de t . Por tanto, $\hat{\zeta}(t) \geq \zeta(t)$ si $t > t_0$ y $\hat{\zeta}(t_0) = \zeta(t_0)$, donde $\hat{\zeta}$ es la interfase de \hat{u} . Ahora bien, para el problema (1.30) el resultado es cierto, $D^+\hat{\zeta}(t_0) = -v_x(\hat{\zeta}(t_0), t_0)$ y, por tanto,

$$\limsup_{d \rightarrow 0^+} \frac{1}{d} (\zeta(t_0 + d) - \zeta(t_0)) \leq D^+\hat{\zeta}(t_0) = -v_x(\zeta(t_0), t_0).$$

A continuación consideramos el problema

$$(1.31) \quad \begin{cases} \bar{u}_t = (\bar{u}^m)_{xx} - \lambda_0 \bar{u} & \text{si } x \in \mathbb{R}, t > t_0, \\ \bar{u}(x, t_0) = u(x, t_0) & \text{si } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

con $\lambda_0 = 1/(m-1)t_0$. Por ser $h(t)$ no creciente, (1.23) garantiza que $h(t)u^m \leq \lambda_0 u$ para $t \geq t_0$. Por consiguiente, $u(x, t)$ es una supersolución de (1.31) para $t \geq t_0$. Por otra parte, (1.31) se puede convertir en un problema sin absorción por medio del cambio de variables

$$(1.32) \quad \begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\lambda_0(m-1)} (1 - e^{-\lambda_0(m-1)t}), \\ \bar{u}(x, t) &= \hat{u}(x, \tau) e^{-\lambda_0 t}, \end{aligned}$$

y no es difícil ver que $D^+\bar{\zeta}(t_0) = -v_x(\bar{\zeta}(t_0), t_0)$ también se satisface. Por consiguiente,

$$\liminf_{d \rightarrow 0^+} \frac{1}{d} (\zeta(t_0 + d) - \zeta(t_0)) \geq D^+\bar{\zeta}(t_0) = -v_x(\zeta(t_0), t_0),$$

lo que prueba el teorema. \square

También podemos extender la caracterización de la existencia de un *tiempo de espera* positivo al caso con coeficiente de absorción dependiente del tiempo.

Teorema 1.14. Sea $t^* = \sup\{t \geq 0 : \zeta(t) = \zeta(0)\}$. Entonces t^* es positivo si y sólo si

$$(1.33) \quad \sup_{x < \zeta(0)} \left((\zeta(0) - x)^{-(m+1)/(m-1)} \int_x^{\zeta(0)} u_0(s) ds \right) < +\infty.$$

Prueba. Si se verifica (1.33), consideramos la solución \hat{u} de (1.30) con $t_0 = 0$. Por los resultados de [V], $\hat{\zeta}$ tiene un tiempo de espera positivo \hat{t}^* . Dado que $\hat{u} \geq u$, concluimos que $t^* \geq \hat{t}^* > 0$.

Inversamente, si u no satisface (1.33), la solución de (1.30) con $t_0 = 0$ tiene tiempo de espera cero. Haciendo el cambio de variables (1.32), lo mismo es cierto para la solución \bar{u} de (1.31) con $t_0 = 0$ y λ_0 arbitrario. Escogiendo λ_0 suficientemente grande, se tiene que $h(t)u^m \leq \lambda_0 u$, ya que u y h son funciones acotadas. Así, u es una supersolución para el problema (1.31) con $t_0 = 0$ y, por tanto, $\bar{u}(x, t) \leq u(x, t)$, de donde $t^* \leq \bar{t}^* = 0$. \square

Teorema 1.15. Sea u una solución del problema (1.1)–(1.2) bajo las hipótesis (H1) y (H2), y sea ζ la correspondiente función de interfase. Entonces $\zeta(t) \in C^1(t^*, \infty)$, $\zeta'(t) > 0$ para $t > t^*$ y

$$(1.34) \quad \zeta'(t)t^\rho$$

es no decreciente cuando $t > t^*$ para un cierto valor $\rho = \rho(m)$.

Prueba. Paso 1. Siguiendo a [HV], probamos en primer lugar una versión débil de (1.34). Sea $t_0 > t^*$ con $D^+\zeta(t_0) > 0$, y sea $\lambda_0 = 1/(m-1)t_0$. Construimos una solución $\bar{u}(x, t)$ de

$$(1.35) \quad \bar{u}_t = (\bar{u}^m)_{xx} - \lambda_0 \bar{u}$$

en la banda $\mathbb{R} \times (t_0, \infty)$ satisfaciendo $\bar{u}(x, t_0) \leq u(x, t_0)$ y tal que \bar{u} tenga buen contacto con u en $x = \zeta(t_0)$; en concreto exigimos que la interfase y la presión correspondientes, $\bar{\zeta}(t)$ y $\bar{v}(x, t)$, satisfagan

$$(1.36) \quad \begin{aligned} \bar{\zeta}(t_0) &= \zeta(t_0), \\ \bar{\zeta}'(t_0) &= D^+\zeta(t_0), \\ \bar{v}_{xx}(x, t_0) &= -C/t_0, \text{ con } C \text{ como en (1.25).} \end{aligned}$$

Partimos de la solución autosemejante explícita para la ecuación de los medios porosos obtenida por Barenblatt

$$\hat{u}_p = t^{-1/(m+1)} \left[p - \frac{(m-1)x^2 t^{-2/(m+1)}}{2m(m+1)} \right]_+^{1/(m-1)},$$

donde $p > 0$ será seleccionado a continuación. Consideramos la solución de (1.35) obtenida a partir de \hat{u}_p a través de la transformación (1.32). Viene dada por

$$\bar{u}_p(x, t) = e^{-\lambda_0 t} g^{-1/(m+1)} \left[p - \frac{(m-1)x^2 g^{-2/(m+1)}}{2m(m+1)} \right]_+^{1/(m-1)},$$

donde

$$g(t) = \frac{1 - e^{-\lambda_0(m-1)t}}{\lambda_0(m-1)}.$$

Hacemos

$$(1.37) \quad \bar{u}(x, t) = \bar{u}_p(x - x_0, t - \tau) \equiv \bar{u}(x, t; p, x_0, \tau).$$

Las constantes x_0 , τ y p quedan determinadas por (1.36) de manera única. En particular, τ se obtiene a partir de la tercera condición de (1.36), que se traduce en

$$e^{1-\tau/t_0} = 1 + \frac{1}{(m+1)C},$$

mientras que x_0 y p se determinan a partir de

$$\begin{aligned} \zeta(t_0) - x_0 &= \frac{t_0}{C} D^+ \zeta(t_0), \\ \frac{t_0}{C} D^+ \zeta(t_0) &= \left(\frac{2m(m+1)p}{m-1} \right)^{1/2} t_0^{1/(m+1)} \left(1 - e^{-1+\tau/t_0} \right)^{1/(m+1)}. \end{aligned}$$

Se sigue de (1.36) que $u(x, t_0) \geq \bar{u}(x, t_0)$. Por otra parte, gracias a la estimación (1.23) tenemos que $\lambda_0 u \geq h(t)u^m$ y, por tanto, u es supersolución de (1.35) para $t \geq t_0$. Así, $u(x, t) \geq \bar{u}(x, t)$ para $t \geq \tau_0$ y, por tanto, $\zeta(t_0 + d) \geq \bar{\zeta}(t_0 + d)$ para todo $d > 0$. Por consiguiente,

$$(1.38) \quad \zeta(t_0 + d) - \zeta(t_0) - dD^+ \zeta(t_0) \geq \bar{\zeta}(t_0 + d) - \bar{\zeta}(t_0) - d\bar{\zeta}'(t_0).$$

Por otro lado, se sigue de (1.37) que

$$(1.39) \quad \bar{\zeta}(t) = x_0 + \left(\frac{2m(m+1)p}{m-1} \right)^{1/2} t_1^{1/(m+1)} \left(1 - e^{-(t-\tau)/t_1} \right)^{1/(m+1)},$$

de forma que $\bar{\zeta}(t)$ es una función C^∞ para $t > \tau$, y el segundo miembro (1.38) se puede escribir como $\bar{\zeta}''(t_0)d^2/2 + O(d^3)$. Por otra parte, se comprueba en (1.39) que

$$\bar{\zeta}''(t_0) = -\rho \frac{\bar{\zeta}'(t_0)}{t_0} \text{ con } \rho = 1 + mC.$$

Dividimos (1.38) por d^2 para obtener

$$(1.40) \quad \frac{2}{d^2} (\zeta(t+d) - \zeta(t) - dD^+ \zeta(t)) \geq -\frac{\rho}{t} D^+ \zeta(t) + O(d)$$

en cualquier punto t_0 en que $D^+\zeta(t_0) > 0$. Es obvio que (1.40) también se satisface en t_0 si $D^+\zeta(t_0) = 0$ (con $O(d) \equiv 0$ en este caso). Por otra parte, se sigue de (1.39) que $O(d)$ es uniforme en t . Por tanto, haciendo $d \rightarrow 0$ obtenemos

$$(1.41) \quad \zeta''(t) \geq -\frac{\rho}{t} D^+\zeta(t), \quad t > 0,$$

donde ζ'' debe ser entendido en el sentido de distribuciones. Puesto que $\zeta(t)$ es localmente Lipschitz continua en $(0, \infty)$, entonces $D^+\zeta(t) = \zeta'(t)$ en casi todo punto, y (1.41) se puede reescribir como

$$(\zeta'(t)t^\rho)' \geq 0 \text{ en } \mathcal{D}'(0, \infty).$$

La fórmula (1.41) dice que la función $\eta(\tau) = \zeta(t)$ con $\tau = -(\rho - 1)^{-1}t^{-(\rho-1)}$ es convexa para $0 \leq \tau < \infty$. Por consiguiente, los límites laterales $D^+\eta(\tau)$ y $D^-\eta(\tau)$ existen para todo $\tau > 0$, son funciones no decrecientes de τ y

$$D^+\eta(\tau) \geq D^-\eta(\tau) \geq D^+\eta(\tau - d) \text{ para } \tau > \tau - d > 0.$$

Puesto que $D^\pm\eta(\tau) = D^\pm\zeta(t)t^\rho$, concluimos que las funciones $D^\pm\zeta(t)t^\rho$ son no negativas y no decrecientes y que

$$(1.42) \quad D^+\zeta(t) \geq D^-\zeta(t) \geq D^+\zeta(t - d) \left(1 - \frac{d}{t}\right)^\rho \text{ para todo } t > t - d > t^*.$$

Nótese que (1.42) implica que, una vez que la frontera empieza a moverse, ya no para nunca.

Paso 2. Para obtener que $\zeta \in C^1(t^*, \infty)$ y que se satisface (1.34), todavía tenemos que probar que $D^+\zeta(t) = D^-\zeta(t)$ para todo $t > t^*$. Pero una vez que se han establecido las estimaciones para v_x , (1.20), y v_{xx} , (1.25), esto se puede hacer repitiendo, con algunas pequeñas modificaciones, los argumentos de [ACK, teorema B] para el caso $h(t) \equiv 0$. \square

2. La ecuación de los estallidos turbulentos: regularidad de las soluciones e interfases

En esta sección obtenemos algunas propiedades relativas a la regularidad de las soluciones e interfases de la ecuación de los estallidos turbulentos. Dichas propiedades son un corolario directo de los resultados probados en la sección anterior. Teniendo en cuenta lo dicho en la introducción podemos considerar la ecuación

$$(2.1) \quad u_t = (u^m)_{xx} - \frac{ku^m}{r^2(t)}$$

con $m > 1$ y $k > 0$. Tomamos como dato inicial

$$(2.2) \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Como se dijo anteriormente, suponemos que u_0 es continua, radialmente simétrica, positiva en un intervalo $|x| < r_0$ para algún $r_0 > 0$ y cero fuera de dicho intervalo. En [KV], Kamin y Vázquez prueban la existencia y unicidad de soluciones para este problema. Recordamos su resultado de existencia.

Teorema, [KV]. Hay al menos una solución débil continua, u , del problema (2.1)–(2.2), que es radialmente simétrica en la variable espacial y tiene soporte compacto en x para todo $t > 0$. La función de interfase es continua y no decreciente.

Ahora bien, dado que $r(t) \geq r_0 > 0$ y que $r(t)$ es continua y no decreciente, u es solución de (1.1)–(1.2) con $h(t) = k/r^2(t)$ acotada, continua y no creciente. Por tanto, todos los resultados de los apartados 1.2 y 1.3 son válidos para u .

Corolario 2.1. Sea (u, r) la solución única del problema (2.1)–(2.2). Las siguientes proposiciones son ciertas:

- (i) La presión $v = mu^{m-1}/(m-1)$ satisface (1.20)–(1.22).
- (ii) $u(x, t) \leq \left((m-1) \int_0^t (1/r^2(s)) ds \right)^{-1/(m-1)}$.
- (iii) $|v_x(x, t)|^2 \leq 4 / \left((m-1)^2 t \int_0^{t/2} (1/r^2(s)) ds \right)$.
- (iv) $v_{xx} \geq -C/t$ en $\mathcal{D}'(S)$.
- (v) $r(t) \in \text{Lip}(0, \infty) \cap C[0, \infty)$.
- (vi) Para todo $t > 0$ existe la derivada por la derecha $D^+r(t)$ y $D^+r(t) = -v_x(r(t), t)$, donde $v_x(r(t), t)$ se debe entender como $\lim v_x(x, t)$ cuando $x \rightarrow r(t)$, $x < r(t)$.
- (vii) Sea $t^* = \sup\{t \geq 0 : r(t) = r(0)\}$. Entonces t^* es positivo si y sólo si

$$\sup_{x < r(0)} \left((r(0) - x)^{-(m+1)/(m-1)} \int_x^{r(0)} u_0(s) ds \right) < +\infty.$$

- (viii) $r(t) \in C^1(t^*, \infty)$, $r'(t) > 0$ para $t > t^*$ y la función $r'(t)t^\rho$ es no decreciente si $t > t^*$ para un cierto valor $\rho = \rho(m)$.

CAPÍTULO VI

EL LÍMITE $m \downarrow 1$. CONVERGENCIA A UNA ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI

Nuestro propósito en este capítulo es investigar el límite de las soluciones de la ecuación

$$u_t = (u^m)_{xx} - \frac{ku^m}{r^2(t)}$$

cuando $m \downarrow 1$. Como vimos en el capítulo V, esta ecuación está estrechamente relacionada con la ecuación de los estallidos turbulentos (I.1), a la cual se reduce mediante un cambio no lineal de la variable tiempo. En el caso $k = 0$ el estudio de este límite fue realizado por Aronson y Vázquez en [AV1].

Será conveniente introducir un parámetro normalizado $\kappa = (m - 1)^2 k / m^2$, que es el relevante para esta ecuación (ver capítulos III y IV). Así, consideramos

$$(1) \quad u_t = (u^m)_{xx} - \frac{\kappa m^2 u^m}{(m - 1)^2 r^2(t)}.$$

Estudiaremos de forma precisa la relación existente entre esta ecuación y la ecuación de tipo Hamilton-Jacobi

$$(2) \quad v_t = v_x^2 - \frac{\kappa v^2}{r^2(t)},$$

donde $r(t)$ es el radio del soporte de v . Para obtener (2) como límite de (1) sustituimos la variable u por la correspondiente presión,

$$v = \frac{m}{m - 1} u^{m-1},$$

que satisface la ecuación

$$(3) \quad v_t = (m - 1) v v_{xx} + v_x^2 - \frac{\kappa m v^2}{r^2(t)}.$$

Las ecuaciones (2) y (3) coinciden formalmente en todas partes cuando $m \downarrow 1$, y es de este límite de lo que nos ocuparemos aquí.

Antes de considerar la convergencia cuando $m \downarrow 1$ en la sección 2, probaremos en la sección 1 varios resultados concernientes a la ecuación límite (2).

1. La ecuación límite

En primer lugar introducimos un concepto adecuado de solución de *viscosidad* para el problema de Cauchy

$$(P_0) \quad \begin{cases} v_t = v_x^2 - \frac{\kappa v^2}{r^2(t)} & \text{en } S = \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ v(\cdot, 0) = v_0 & \text{en } \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde v_0 es una función de soporte compacto, simétrica, continua y no negativa, y $r(t)$ es el radio del soporte de v .

Definición 1.1. Diremos que el par de funciones (v, r) , con $v(x, t)$ definida en \bar{S} y $r(t)$ definida en $[0, \infty)$, es una solución de viscosidad del problema (P_0) si:

- (i) v es continua, no negativa y acotada en \bar{S} , y simétrica en x para todo $t \geq 0$;
- (ii) $r(t)$ es positiva y continua en $[0, \infty)$;
- (iii) $\text{sop } v(\cdot, t) = [-r(t), r(t)]$ para todo $t \geq 0$;
- (iv) $v(x, 0) = v_0(x)$;
- (v) $v_t = v_x^2 - \kappa v^2 / r^2(t)$ en $\mathcal{D}'(S)$;
- (vi) $v_{xx} \geq -A/t$ para alguna constante $A > 0$.

Cuando una función $v(x, t)$ como la de la definición satisface (v) con \leq (respectivamente \geq) en vez de $=$, decimos que es una *subsolución* (respectivamente *supersolución*) de viscosidad de (P_0) .

La condición de semiconvexidad (vi) garantiza la unicidad como probaremos inmediatamente. Esta condición caracteriza a las soluciones de viscosidad para la ecuación de Hamilton-Jacobi $v_t = v_x^2$ (véase [L]), y es por eso por lo que nosotros hablamos también de soluciones de viscosidad.

Para probar la unicidad tendremos que considerar el problema relacionado

$$\begin{aligned} (1.1.a) \quad & v_t = v_x^2 - h(t)v^2 && \text{en } S, \\ (1.1.b) \quad & v(\cdot, 0) = v_0 && \text{en } \mathbb{R}, \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (1.1.a) \quad & v_t = v_x^2 - h(t)v^2 \\ (1.1.b) \quad & v(\cdot, 0) = v_0 \end{aligned}} \right\}$$

donde v_0 es una función acotada, continua y no negativa, y $h(t)$ es una función positiva dada. Introducimos ahora un concepto de solución para este último problema.

Definición 1.2. Diremos que una función $v(x, t)$ continua, no negativa y acotada en $\bar{S} = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ es una solución de viscosidad del problema (1.1) si

- (i) $v(x, 0) = v_0(x)$;
- (ii) $v_t = v_x^2 - h(t)v^2$ en $\mathcal{D}'(S)$;
- (iii) $v_{xx} \geq -A/t$ para alguna constante $A > 0$.

Cuando una función $v(x, t)$ como la de la definición satisface (ii) con \leq (respectivamente \geq) en vez de $=$, decimos que es una *subsolución* (respectivamente *supersolución*) de viscosidad de (1.1).

Observación. Si una función f satisface: (i) $0 \leq f \leq N$ y (ii) $f_{xx} \geq -A/t$, entonces $|f_x| \leq B/t^{1/2}$, con $B = \sqrt{2NA}$. Esto es simplemente un lema de cálculo (véase el lema 1.3 de [AV1] para los detalles).

Empezamos estableciendo unicidad y comparación para el problema (1.1).

Lema 1.3. Sean v_i , $i = 1, 2$, soluciones de viscosidad del problema (1.1) satisfaciendo: (i) $0 \leq v_i \leq N$ y (ii) $v_{ixx} \geq -A/t$ en el sentido de distribuciones en S para ciertas constantes $N, A > 0$. Sea $B = \sqrt{2NA}$. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ arbitrarios, sea

$$D = \{(x, t) \in S : a + 4Bt^{1/2} \leq x \leq b - 4Bt^{1/2}, 0 \leq t \leq T\},$$

donde $T = \{(b - a)/8B\}^2$ y sea $D_t = \{x \in \mathbb{R} : (x, t) \in D\}$. Entonces, para todo $\mu > 0$ la función

$$\Phi_\mu(t) = t^{-2A} \int_{D_t} (\{v_1 - v_2\}_+)^{\mu} dx$$

es no creciente en $[0, T]$. Además, para todo $t \in [0, T]$

$$(1.2) \quad \max_{x \in D_t} \{v_1(x, t) - v_2(x, t)\}_+ \leq \max_{a \leq x \leq b} \{v_1(x, 0) - v_2(x, 0)\}_+.$$

Prueba. Como en [AV1], empezamos mostrando que si Φ_μ es no creciente para todo $\mu \in \mathbb{R}^+$ entonces se satisface (1.2). Para cualquier t y τ con $0 < \tau < t \leq T$, $\Phi_\mu(t) \leq \Phi_\mu(\tau)$ implica que

$$\left(\int_{D_t} (\{v_1 - v_2\}_+)^{\mu} dx \right)^{1/\mu} \leq \left(\frac{t}{\tau} \right)^{2A/\mu} \left(\int_{D_\tau} (\{v_1 - v_2\}_+)^{\mu} dx \right)^{1/\mu}.$$

Así, haciendo $\mu \uparrow \infty$ obtenemos

$$\max_{x \in D_t} \{v_1 - v_2\}_+ \leq \max_{x \in D_\tau} \{v_1 - v_2\}_+,$$

y llegamos a (1.2) haciendo $\tau \downarrow 0$.

Probemos ahora que Φ_μ es no creciente para $\mu \in \mathbb{R}^+$. Definimos $W = (\{v_1 - v_2\}_+)^{\mu}$. Entonces

$$(1.3) \quad W_t = \mathcal{A}W - BW \text{ en } \mathcal{D}'(S),$$

donde $\mathcal{A} = v_{1x} + v_{2x}$ satisface $|\mathcal{A}| \leq 2Bt^{-1/2}$ y $B = h(t)\mu(v_1 + v_2) \geq 0$. Suponemos por el momento que $v_i \in C^2(S)$ y escribimos (1.3) en la forma

$$W_t = (\mathcal{A}W)_x - \mathcal{A}_x W - BW.$$

Para $\sigma, \tau \in (0, T)$ con $\sigma < \tau$ integramos en $D_\sigma^\tau \equiv \{(x, t) \in D : \sigma \leq t \leq \tau\}$ y obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{D_\tau} W \, dx &= \int_{D_\sigma} W \, dx - \int_{D_\sigma^\tau} \mathcal{A}_x W \, dx \, dt - \int_{D_\sigma^\tau} B W \, dx \, dt \\ &\quad + \int_\sigma^\tau W(\mathcal{A} - g')|_{x=b-g} \, dt - \int_\sigma^\tau W(\mathcal{A} + g')|_{x=a+g} \, dt, \end{aligned}$$

donde $g(t) = 4Bt^{1/2}$. Las integrales tercera, cuarta y quinta del segundo miembro son no positivas, ya que $|\mathcal{A}| \leq 2Bt^{-1/2} = g'$. Por otro lado, por la condición de semiconvexidad, $-\mathcal{A}_x \leq 2A/t$. Por consiguiente, si hacemos

$$f(t) = \int_{D_t} W \, dx,$$

entonces

$$(1.4) \quad f(\tau) \leq f(\sigma) + 2A \int_\sigma^\tau \frac{1}{t} f(t) \, dt.$$

Concluimos que

$$f(\tau) \leq \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{2A} f(\sigma)$$

de manera que $\Phi_\mu(t) = t^{-2A} f(t)$ es no creciente en $(0, T)$. Por continuidad, lo mismo es cierto en $[0, T]$.

Si $v_i \notin C^2(S)$, aproximamos $\mathcal{A} = v_{1x} + v_{2x}$ por una sucesión $\{\mathcal{A}^n\}$ de funciones $C^2(S)$ tales que $|\mathcal{A}^n| \leq 2Bt^{-1/2}$, $\mathcal{A}_x^n \geq -2At^{-1}$ y $\mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$ en $L_{loc}^1(S)$. Escribimos (1.3) en la forma

$$W_t = (\mathcal{A}^n W)_x - \mathcal{A}_x^n W + (\mathcal{A} - \mathcal{A}^n) W_x - B W.$$

Dado que

$$\left| \iint_{D_\sigma^\tau} (\mathcal{A} - \mathcal{A}^n) W_x \, dx \, dt \right| \leq 2B\sigma^{-1/2} \|\mathcal{A} - \mathcal{A}^n\|_{L^1(D_\sigma^\tau)},$$

razonando como antes encontramos que

$$f(\tau) \leq f(\sigma) + 2A \int_\sigma^\tau \frac{1}{t} f(t) \, dt + (2B\sigma^{-1/2}) \|\mathcal{A} - \mathcal{A}^n\|_{L^1(D_\sigma^\tau)},$$

de donde deducimos (1.4) haciendo $n \rightarrow \infty$. \square

Observación. Si v_1 es una subsolución y v_2 una supersolución, el resultado sigue siendo válido. Se tiene, por tanto, comparación.

Lema 1.4. Sean v_1 y v_2 dos soluciones de viscosidad de (P_0) con datos admisibles v_{10} y v_{20} . Sean $r_1(t)$ y $r_2(t)$ las interfases correspondientes. Si $r_1(0)$ es estrictamente menor que $r_2(0)$ y $v_{10} < v_{20}$ en el soporte de v_{20} , entonces $v_1 \leq v_2$ en S .

Prueba. Sea $T = \sup\{\tau \in \mathbb{R}^+ : r_1(t) \leq r_2(t) \text{ en } [0, \tau]\}$. Por la continuidad de las interfases, $T > 0$ (puede ser infinito). Sea $I = [0, T]$. En este intervalo tenemos

$$v_{2t} = v_{2x}^2 - \frac{\kappa v_2^2}{r_2^2(t)} \geq v_{2x}^2 - \frac{\kappa v_2^2}{r_1^2(t)},$$

es decir, v_2 es una supersolución para la ecuación de tipo Hamilton-Jacobi no lineal

$$(1.5) \quad v_t = v_x^2 - h(t)v^2, \quad h(t) = \kappa/r_1^2(t),$$

donde hemos congelado el coeficiente $r(t)$ en el valor tomado por la interfase de v_1 . Dado que para esta última ecuación tenemos comparación, obtenemos que $v_1(x, t) \leq v_2(x, t)$ para $t \in I$. Probamos ahora que T tiene que ser infinito, lo que claramente implica nuestro resultado. Por la maximalidad de T tenemos

$$(1.6) \quad r_1(T) = r_2(T).$$

Vamos a probar que, por lo visto hasta ahora, (1.6) es imposible. Si sustituimos v_2 por su trasladada $\tilde{v}(x, t) = v_2(x + \delta, t)$ con δ pequeño, entonces \tilde{v} será también una supersolución de la ecuación (1.5), que tiene dato inicial mayor que v_{10} . Concluimos que $\tilde{v}(x, t) \geq v_1(x, t)$ para $t \in I$ lo que en términos de los soportes significa que

$$r_2(t) - \delta \geq r_1(t) \text{ para } 0 \leq t \leq T.$$

En particular $r_1(T) < r_2(T)$. Esto termina la prueba. \square

Observación. Si v_1 es una subsolución y v_2 una supersolución, el resultado sigue siendo válido.

Teorema 1.5. Las soluciones de viscosidad de (P_0) tienen unicidad y comparación.

Prueba. Supongamos que hubiera dos soluciones, v_1 y v_2 , con el mismo dato inicial. Introducimos la función \tilde{v}_2 definida mediante la fórmula

$$\tilde{v}_2(x, t) = \frac{\lambda^2}{\sigma} v_2\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\sigma}\right)$$

para λ y $\sigma > 0$, de forma que \tilde{v}_2 es también solución de nuestro problema. Si escogemos $\lambda = 1 + \epsilon \approx 1$ y después tomamos $\sigma < 1$ adecuado, \tilde{v}_2 tiene dato inicial y soporte inicial estrictamente mayores que los de v_1 . Por el lema 1.4 deducimos que $v_1 \leq \tilde{v}_2$ en S . Haciendo $\epsilon \rightarrow 0$ y, por tanto, $\sigma \rightarrow 1$, concluimos que $v_1 \leq v_2$. Invirtiendo los papeles de v_1 y v_2 obtenemos unicidad. La misma técnica permite probar comparación. \square

Necesitamos también el siguiente lema que establece que, si h es no creciente, entonces el conjunto de positividad de cualquier solución de (1.1) es no decreciente.

Lema 1.6. Sea v una solución de viscosidad del problema (1.1) con h positiva y no creciente. Si $v(x_0, t_0) > 0$, entonces $v(x_0, t) > 0$ para todo $t \geq t_0$.

Para probar este resultado necesitamos una cota *a priori* para v .

Lema 1.7. Sea $v(x, t)$ una solución del problema (1.1). Entonces

$$v(x, t) \leq \left(\int_0^t h(s) ds \right)^{-1}.$$

Prueba. La cota es una consecuencia de la existencia de una solución de viscosidad plana de (1.1.a) de la forma

$$v^*(x, t) = \left(\int_0^t h(s) ds \right)^{-1}$$

y de la comparación. \square

Observación. Si $h(t)$ es no creciente,

$$(1.7) \quad v(x, t) \leq \frac{1}{th(t)}.$$

Prueba del lema 1.6. Sea $t_0 > 0$. Consideramos el problema

$$(1.8) \quad \begin{cases} \bar{v}_t = \bar{v}_x^2 - \frac{\bar{v}}{t_0} & \text{si } x \in \mathbb{R}, t > t_0, \\ \bar{v}(x, t_0) = v(x, t_0) & \text{si } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Así, por (1.7) (h es no creciente), tenemos que $h(t)v^2 \leq v/t_0$ para $t \geq t_0$. Por consiguiente, $v(x, t)$ es una supersolución de (1.8) para $t \geq t_0$. Por otra parte, (1.8) se puede transformar en un problema de Hamilton-Jacobi sin absorción por medio del cambio de variables

$$(1.9) \quad \begin{cases} \tau = t_0(1 - e^{-t/t_0}), \\ \hat{v}(x, \tau) = e^{t/t_0} \bar{v}(x, t). \end{cases}$$

Es bien sabido que el conjunto de positividad de las soluciones de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi no disminuye. Por tanto, invirtiendo el cambio de variables (1.9) obtenemos el mismo resultado para v para todo $t_0 > 0$.

Consideramos ahora el caso $t_0 = 0$. Nos concentramos en la interfase derecha, a la que denotamos por $\zeta(t)$. Acabamos de probar que $\zeta(t)$ es no decreciente para $t > 0$. Por consiguiente, existe el límite $\lim_{t \rightarrow 0^+} \zeta(t) = a$. La continuidad de v hasta $t = 0$ implica que $a \geq \zeta(0)$. \square

2. Convergencia

Sea $\varepsilon = m - 1$. El resultado de convergencia es el siguiente:

Teorema 2.1. *Sea v_0 una función continua, simétrica, con soporte compacto $[-r_0, r_0]$, tal que $0 \leq v_0 \leq N$ para alguna constante $N > 0$. Sea $(v_\varepsilon, r_\varepsilon)$ la solución de*

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} v_{\varepsilon t} = \varepsilon v_\varepsilon v_{\varepsilon x x} + v_{\varepsilon x}^2 - \frac{\kappa(\varepsilon + 1)v_\varepsilon^2}{r_\varepsilon^2(t)} & \text{en } S, \\ v_\varepsilon(x, 0) = v_0(x) & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Las siguientes afirmaciones son ciertas:

- A) Cuando $\varepsilon \downarrow 0$, la familia $\{v_\varepsilon\}$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de \bar{S} a una función $v \in C(\bar{S})$ tal que
- (i) $v \in \text{Lip}(S_\tau)$ para todo $\tau > 0$,
 - (ii) $v(x, 0) = v_0(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$,
 - (iii) $v_{xx} \geq -C/t$ en $\mathcal{D}'(S)$, donde C es una constante independiente de ε .
- Además, $v_{\varepsilon x} \rightarrow v_x$ en $L_{\text{loc}}^p(S)$ para todo $1 \leq p < \infty$.
- B) Cuando $\varepsilon \downarrow 0$, la familia $\{r_\varepsilon(t)\}$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de $[0, \infty)$ a una función $r(t) \in C(\mathbb{R}^+)$, localmente Lipschitz continua y no decreciente, Hölder continua con exponente $1/2$ en $t = 0$, que satisface

$$r'' + \frac{\bar{\rho}}{t} r' \geq 0 \text{ en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+), \text{ donde } \bar{\rho} = 1 + (1 + \sqrt{129})/4.$$

C)

$$v_t = v_x^2 - \frac{\kappa v^2}{r^2(t)} \text{ en } \mathcal{D}'(S) \text{ y en casi todo punto.}$$

- D) $r(t)$ es la interfase de v . Por consiguiente, v es la única solución de viscosidad de (P_0) .

Prueba. Paso 1. Las funciones v_ε son subsoluciones de la ecuación de los medios porosos. El principio del máximo para esta última ecuación implica que la familia está uniformemente acotada en S por N . Es más, por la proposición (i) del corolario V.2.1, $\{v_\varepsilon\}$ es equicontinua en S_τ para todo $\tau > 0$. Existe, por tanto, una sucesión $\varepsilon_n \downarrow 0$ tal que $v_n \equiv v_{\varepsilon_n} \rightarrow v \in C(S)$ uniformemente en S_τ para todo $\tau > 0$. Obviamente, $0 \leq v \leq N$ y, por la proposición (iv) del mismo corolario,

$$v_{xx} \geq -\frac{C}{t} \quad \text{en } \mathcal{D}'(S),$$

con C una constante independiente de m (por ejemplo $C = (1 + \sqrt{129})/4$).

Haciendo $\varepsilon_n \downarrow 0$ (es decir, $m \downarrow 1$) en las estimaciones (V.1.20) y (V.1.22), obtenemos que v es uniformemente Lipschitz continua con respecto a x y t en S_τ para todo $\tau > 0$. Además, la sucesión $\{v_{nx}\}$ es relativamente compacta en $L_{\text{loc}}^p(S)$. Esto es una consecuencia del siguiente resultado de compacidad que es una variación del lema 10.1 de [L].

Lema, [L]. Sea $\{V_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión en $C(S)$ tal que para todo subconjunto compacto $S' \subset\subset S$ se tiene

- (i) $\{V_n\}$ converge uniformemente,
- (ii) $\{V_{nx}\}$ está acotado en $L^\infty(S')$,
- (iii) existe una constante $C = C(S') > 0$ tal que para todo $n \geq 1$

$$(2.1) \quad V_{nxx} \geq -C(S') \quad \text{en } \mathcal{D}'(S').$$

Entonces $\{V_{nx}\}$ es relativamente compacto en $L^p_{\text{loc}}(S)$ para todo $p \in [1, \infty)$.

La principal idea de la prueba es que una estimación del tipo (2.1) implica una cota para V_{nxx} en el espacio $\mathcal{M}_b(S')$ de las medidas sobre S' acotadas (véase también el lema 3.1 de [L]).

En vista de la compacidad relativa de $\{v_{nx}\}$ tenemos, después de pasar a una subsucesión (a la que también llamamos $\{v_n\}$) si fuera necesario,

$$v_{nx} \rightarrow v_x \quad \text{en } L^p_{\text{loc}}(S) \quad \text{y en casi todo punto.}$$

Consideramos ahora la convergencia en $t = 0$. Empezamos suponiendo que $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$ y que $\|v'_0\|_\infty = L$. Gracias a la proposición (i) del corolario V.2.1 y a la observación que sigue al teorema V.1.6, dado $\delta > 0$ podemos encontrar un valor $\tau = \tau(N, L)$ tal que, si $\varepsilon_n \in (0, 1)$, tenemos

$$(2.2) \quad |v_n(x, t) - v_0(x)| \leq \delta/2$$

para $0 < t \leq \tau$ y $x \in \mathbb{R}$. Haciendo $\varepsilon_n \downarrow 0$ llegamos a

$$(2.3) \quad |v(x, t) - v_0(x)| \leq \delta/2,$$

de donde deducimos que $|v_n(x, t) - v(x, t)| \leq \delta$ y, por tanto, que la convergencia es uniforme en x cerca de $t = 0$.

Para v_0 general utilizamos un argumento de barrera, aprovechando el resultado anterior. Dado $I = (a, b)$, tomamos $\delta > 0$ y construimos funciones $\bar{v}_0, \underline{v}_0 \in C^1(\mathbb{R})$ con derivada acotada tales que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \underline{v}_0(x) \leq v_0(x) \leq \bar{v}_0(x), \\ \bar{v}_0(x) - \underline{v}_0(x) &< \delta/2 \quad \text{si } x \in I. \end{aligned}$$

Denotamos por $\bar{v}_\varepsilon(x, t)$, $\underline{v}_\varepsilon(x, t)$ a las soluciones de (P_ε) con datos iniciales $\bar{v}_0, \underline{v}_0$ respectivamente y por $\bar{v}(x, t)$, $\underline{v}(x, t)$ a sus límites cuando $\varepsilon_n \downarrow 0$ (puede que tengamos que pasar nuevamente a una subsucesión). Usando (2.2) y (2.3) para \bar{v}_0 y \underline{v}_0 , existe un tiempo $\tau > 0$ tal que, si $x \in I$ y $0 < t \leq \tau$, entonces

$$v_n(x, t) \leq \bar{v}_n(x, t) \leq \bar{v}_0(x) + \delta/2 \leq v_0(x) + \delta$$

y

$$v(x, t) \geq \underline{v}(x, t) \geq \underline{v}_0(x) - \delta/2 \geq v_0(x) - \delta.$$

Por tanto, $v_n(x, t) - v(x, t) \leq 2\delta$. De forma similar obtenemos que $v_n(x, t) - v(x, t) \geq 2\delta$. Se sigue que $v_n \rightarrow v$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de \bar{S} . Concluimos que $v \in C(\bar{S})$ y que $v(x, 0) = v_0(x)$.

Paso 2. Sabemos (véase la sección V.2) que $r_\varepsilon(t)$ es una función continua y no decreciente en $[0, \infty)$. Sea $N = \|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. Afirmamos que

$$(2.4) \quad r_\varepsilon(t) \leq r_0 + 2\sqrt{Nt}.$$

Para probarlo observamos que $u_\varepsilon \equiv (\varepsilon v / (\varepsilon + 1))^{1/\varepsilon}$ es una subsolución de la ecuación de los medios porosos. Por consiguiente $u_\varepsilon \leq \bar{u}_\varepsilon$, donde \bar{u}_ε es la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = (u^{\varepsilon+1})_{xx}, \\ u(x, 0) = u_0(x) \equiv \left(\frac{\varepsilon v_0}{\varepsilon + 1} \right)^{1/\varepsilon}. \end{cases}$$

Así, $r_\varepsilon(t) \leq \bar{r}_\varepsilon(t)$, donde $\bar{r}_\varepsilon(t)$ es la interfase de \bar{u}_ε . Dado que $\bar{r}_\varepsilon(t) \leq r_0 + 2\sqrt{Nt}$ (ver [AV1]) obtenemos inmediatamente el resultado.

En vista de (2.4), (V.1.29) y (V.1.20), la familia $\{r_{\varepsilon_n}\}$ es uniformemente acotada y equicontinua en cualquier subconjunto compacto de \mathbb{R}^+ . Así, hay una función $r \in C(\mathbb{R}^+)$ y una subsucesión $\{\varepsilon_{n_j}\}$ tales que $\varepsilon_j \equiv \varepsilon_{n_j} \downarrow 0$ y $r_j \equiv r_{\varepsilon_{n_j}} \rightarrow r$ localmente uniformemente en \mathbb{R}^+ . Pasando al límite en (V.1.41) se ve que r satisface

$$r'' + \frac{\bar{\rho}}{t} r' \geq 0 \text{ en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+), \text{ donde } \bar{\rho} = 1 + (1 + \sqrt{129})/4,$$

y es localmente Lipschitz continua y no decreciente. Además, (2.4) implica que $r(0) = r_0$ y que r es Hölder continua con exponente $1/2$ en $t = 0$. Por consiguiente, la convergencia de r_j a r es uniforme en $[0, T]$ para todo $T > 0$.

Paso 3. Dado que v_j satisface

$$\iint_S \left(\varepsilon_j v_j v_{jx} \phi_x + (\varepsilon_j - 1) v_{jx}^2 \phi + \frac{\kappa(\varepsilon_j + 1) v_j^2}{r_j^2} \phi - v_j \phi_t \right) dx dt = 0$$

para todas las funciones $\phi \in C_0^1(S)$, haciendo $j \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\iint_S \left(v_x^2 \phi - \frac{\kappa v^2}{r^2} \phi + v \phi_t \right) dx dt = 0.$$

Así pues, v satisface $v_t = v_x^2 - \kappa v^2 / r^2$ en $\mathcal{D}'(S)$ y en casi todo punto. De hecho v es la única solución de viscosidad de

$$\begin{cases} v_t = v_x^2 - \frac{\kappa v^2}{r^2}, \\ v(x, 0) = v_0(x). \end{cases}$$

Paso 4. A continuación veremos que r es la interfase de v , de forma que, en particular, toda la familia r_n converge a r .

Supongamos que $(\hat{x}, \hat{t}) \in S$ es tal que $r(\hat{t}) < \hat{x}$. Entonces $\zeta_j(\hat{t}) < \hat{x}$ para todo j suficientemente grande. Por consiguiente, $v_j(\hat{x}, \hat{t}) = 0$ para todo j suficientemente grande. En consecuencia, $v(\hat{x}, \hat{t}) = \lim v_j(\hat{x}, \hat{t}) = 0$ de forma que

$$\zeta(\hat{t}) = \sup\{x \in \mathbb{R} : v(x, \hat{t}) > 0\} \leq r(\hat{t}).$$

Como $\zeta_\varepsilon \geq r_0$, se sigue que $r \geq r_0$. Si para algún $\hat{t} > 0$ tenemos que $r(\hat{t}) = r_0$, entonces $r = r_0$ en $[0, \hat{t}]$ y r es la interfase de v en $[0, \hat{t}]$.

Observación. Hemos utilizado que ζ es no decreciente, lo que se deduce del lema 1.6 sin más que tener en cuenta que $r(t)$ es no decreciente.

Suponemos ahora que $r(\hat{t}) > r_0$ y consideramos \bar{x} tal que $r_0 < \bar{x} < r(\hat{t})$. Sea $t_0 > 0$ tal que $r(t_0) = \bar{x}$. Sean $\mu = \hat{t}/t_0 > 1$ y $D = C/(\mu^C - 1)$, con $C = (1 + \sqrt{129})/4$. Consideramos \hat{x} tal que

$$\frac{r(\hat{t}) + \bar{x}(2D/C)}{1 + (2D/C)} < \hat{x} < r(\hat{t}).$$

Para j suficientemente grande,

$$\hat{x} < \zeta_j(\hat{t}) = \int_{t_0}^{\hat{t}} \zeta'_j(t) dt + \zeta_j(t_0) \leq \left(\frac{\mu^{\rho-1} - 1}{\rho - 1} \right) \zeta'_j(\hat{t})\hat{t} + \zeta_j(t_0)$$

por la naturaleza no decreciente de $\zeta'_j(t)t^\rho$ con $\rho = 1 + mC(m)$, siendo $C(m)$ la constante de semiconvexidad dada en (V.1.25). Por consiguiente, en vista de (V.1.29),

$$-v_{jx}(\zeta_j(\hat{t}), \hat{t}) = \zeta'_j(\hat{t}) > \frac{(\hat{x} - \zeta_j(t_0))}{\hat{t}} \left(\frac{\rho - 1}{\mu^{\rho-1} - 1} \right).$$

Por el teorema de Taylor tenemos que

$$\begin{aligned} v_j(\hat{x}, \hat{t}) &= v_j(\zeta_j(\hat{t}), \hat{t}) + (\hat{x} - \zeta_j(\hat{t}))v_{jx}(\zeta_j(\hat{t}), \hat{t}) + \frac{1}{2}(\hat{x} - \zeta_j(\hat{t}))^2 v_{jxx}(\cdot, \hat{t}) \\ &\geq \frac{(\zeta_j(\hat{t}) - \hat{x})}{\hat{t}} \left((\hat{x} - \zeta_j(t_0)) \left(\frac{\rho - 1}{\mu^{\rho-1} - 1} \right) - \frac{C(m)}{2}(\zeta_j(\hat{t}) - \hat{x}) \right). \end{aligned}$$

Haciendo $j \rightarrow \infty$ llegamos a

$$v(\hat{x}, \hat{t}) \geq \frac{r(\hat{t}) - \hat{x}}{\hat{t}} \left((\hat{x} - \bar{x})D - \frac{C}{2}(r(\hat{t}) - \hat{x}) \right) > 0.$$

Concluimos que $r(\hat{t}) \leq \zeta(\hat{t})$.

Paso 5. Hemos probado que $(v_n, r_n) \rightarrow (v, r)$, donde (v, r) es la única solución de viscosidad del problema (P₀). Por tanto, toda la sucesión $(v_\varepsilon, r_\varepsilon)$ converge a (v, r) . \square

CAPÍTULO VII

AUTOSEMEJANZA EN EL CASO $m = 1$

En el capítulo IV vimos que la presión normalizada dada por $W = mf^{m-1}/(m-1)(1-\mu)$ en el caso de soluciones autosemejantes del primer tipo, $W = mf^{m-1}/(m-1)(\mu-1)$ para soluciones del segundo tipo y $W = mf^{m-1}/\lambda(m-1)$ para las del tercer tipo, es en los tres casos solución del mismo problema de autovalores:

$$(1) \quad \begin{cases} W'' + \frac{1}{m-1} \frac{W'}{W} (W' + \zeta) + \frac{\gamma}{m-1} - \frac{\kappa m}{m-1} W = 0 & \text{si } 0 < \zeta < 1, \\ W > 0 & \text{si } 0 \leq \zeta < 1, \\ W'(0) = 0, W(1) = 0 \text{ y } W'(1) = -1, \end{cases}$$

con $\gamma = \mu/(1-\mu) > -1$ en el primer caso, $\gamma < -1$ en el segundo y $\gamma = -1$ en el caso exponencial. En los capítulos II, III y IV hemos demostrado que (1) tiene solución para todo $\gamma \in \mathbb{R}$. Sin embargo, no hemos sido capaces de probar ni la unicidad ni la regularidad del exponente de autosemejanza γ como función del parámetro κ , cuando $\kappa < 0$. Si hacemos formalmente $m = 1$ en (1), obtenemos

$$(2) \quad \begin{cases} W'^2 + W'\zeta + \gamma W - \kappa W^2 = 0 & \text{si } 0 < \zeta < 1, \\ W > 0 & \text{si } 0 \leq \zeta < 1, \\ W'(0) = 0, W(1) = 0 \text{ y } W'(1) = -1. \end{cases}$$

En este capítulo consideramos este caso límite $m = 1$, que es más sencillo, y hacemos un estudio completo del mismo. Los fenómenos que se observan son los mismos que revela el cálculo numérico para $m > 1$.

La sección 1 se dedica al caso $\kappa \geq 0$. Además de estudiar la existencia, unicidad y propiedades de las soluciones de (2) y de los correspondientes exponentes de autosemejanza, probamos que al pasar al límite $m \downarrow 1$ las soluciones de (1) convergen a una función $W \in C^1([0, 1])$ que es solución de (2) para el valor de γ que se obtiene al pasar al límite $m \downarrow 1$ en los exponentes de autosemejanza para $m > 1$. Esto muestra que la semejanza cualitativa observada entre los casos $m > 1$ y $m = 1$ no es casual.

En la sección 2 estudiamos el caso $\kappa < 0$ y probamos que la rama de soluciones clásicas obtenida en la sección 1 se puede extender de forma continua y monótona al intervalo $(-\pi^2, 0)$. El problema (2) no tiene soluciones clásicas con γ finito para $\kappa \leq -\pi^2$. Sin embargo, como veremos en la sección 3, sí tiene soluciones con $\gamma = -\infty$. Estas soluciones se dan explícitamente.

Finalmente, en la sección 4 vemos que las soluciones clásicas de (2) corresponden a soluciones autosemejantes de la ecuación de los estallidos turbulentos con $m = 1$.

1. $\kappa \geq 0$. Límite $m \downarrow 1$

Dados $m > 1$ y $\kappa \geq 0$ hay un único valor $\gamma(m, \kappa)$ tal que el problema (1) tiene solución (única) $W(\zeta; m, \kappa)$. Queremos estudiar el límite de $\gamma(m, \kappa)$ y $W(\zeta; m, \kappa)$ cuando $m \downarrow 1$ para $\kappa \geq 0$ fijo. Supondremos por el momento que $\kappa > 0$. El caso $\kappa = 0$ se tratará por separado un poco más adelante. Tenemos las siguientes estimaciones *a priori*:

$$(i) \quad 1 \geq W(\zeta; m, \kappa) \geq 0;$$

$$(ii) \quad 0 \geq W'(\zeta; m, \kappa) \geq -1;$$

$$(iii) \quad 0 \geq W''(\zeta; m, \kappa) \geq -C_m(m(\kappa + 1) + 1) \text{ donde } C_m = \frac{1 + \sqrt{1 + (64(m + 1)/m)}}{2(m + 1)}.$$

Las estimaciones (i) y (ii), así como la primera desigualdad de (iii), son consecuencia inmediata de la concavidad de W . Estudiemos con detalle la segunda desigualdad de (iii). En el corolario V.2.1 obtuvimos que las presiones correspondientes a las soluciones de

$$(1.1) \quad u_\tau = (u^m)_{xx} - \frac{\kappa m^2 u^m}{(m - 1)^2 \tau^2(\tau)}$$

satisfacen la estimación de semiconvexidad

$$(1.2) \quad v_{xx} \geq -C_m/\tau.$$

Como sabemos, podemos transformar soluciones de la ecuación de los estallidos turbulentos en soluciones de (1.1) mediante el cambio de variable no lineal $d\tau = l(t)dt$. En el caso particular en que v sea una solución autosemejante de tipo (T1), se tiene que $v = t^{-\mu}w(\zeta)$ con $\zeta = |x|t^{\mu-1}$. Así, $l(t) = t^{1-\mu}$ y por tanto $\tau = t^{2-\mu}/(2-\mu)$. Sustituyendo en (1.2) se obtiene la desigualdad $w'' \geq -C_m(2-\mu)$, que se transforma en la estimación

$$(1.3) \quad W'' \geq -C_m(2 + \gamma)$$

para el perfil cambiado de escala. Por otra parte, tenemos que

$$w(0) \geq \frac{1}{\kappa} \left(\mu - \frac{(m-1)}{m} \right)$$

(véase la desigualdad (II.4.2)), que para la variable W se traduce en

$$W(0) \geq \frac{1}{\kappa} \left(\frac{(1+\gamma)}{m} - 1 \right).$$

Combinando esto con que $W(0) \leq 1$, se tiene que

$$(1.4) \quad \gamma \leq m(\kappa + 1) - 1.$$

De aquí se deduce que $(2 + \gamma) \leq m(\kappa + 1) + 1$, lo que introducido en (1.3) produce el resultado deseado.

Gracias a las estimaciones (i)–(iii) tenemos garantizada la existencia de una subsucesión $\{W_n\}$, con $W_n \equiv W(\zeta; m_n, \kappa)$, y de una función $\bar{W} \in C^1([0, 1])$ tales que

$$\begin{aligned} W_n &\rightarrow \bar{W} \text{ uniformemente en } [0, 1]; \\ W'_n &\rightarrow \bar{W}' \text{ uniformemente en } [0, 1]; \end{aligned}$$

con \bar{W} verificando

$$\begin{aligned} 1 &\geq \bar{W}(\zeta; \kappa) \geq 0 \text{ para todo } \zeta \in [0, 1]; \\ 0 &\geq \bar{W}'(\zeta; \kappa) \geq -1 \text{ para todo } \zeta \in [0, 1]; \\ 0 &\geq \bar{W}''(\zeta; \kappa) \geq -C_1(\kappa + 2) \text{ en casi todo punto, donde } C_1 = (1 + \sqrt{129})/4. \end{aligned}$$

En principio las estimaciones para \bar{W}'' sólo se satisfacen en el sentido de distribuciones, pero precisamente una consecuencia de las mismas es que \bar{W}'' es, de hecho, una función de L^∞ y que las estimaciones se cumplen en casi todo punto.

En cuanto a $\gamma(m, \kappa)$, tenemos dos estimaciones uniformes, una inferior trivial, $\gamma \geq 0$, y otra superior dada por (1.4). Existe, pues, una subsucesión $\{\gamma(m_n, \kappa)\}$ convergente a un cierto número $\bar{\gamma} \geq 0$.

Podemos pasar al límite en (1) obteniendo que \bar{W} es solución de (2) para $\gamma = \bar{\gamma}$. La positividad de \bar{W} en $[0, 1]$ es consecuencia de la monotonía y de que $\bar{W}'(1) = -1$. Esto nos conduce a estudiar las propiedades de las soluciones clásicas del problema (2). Probaremos en primer lugar que dado $\kappa \geq 0$ hay un único γ , que es no negativo, tal que el problema (2) tiene solución clásica, que resulta ser única. Esto demostrará en particular que toda la sucesión $\gamma(m, \kappa) \rightarrow \bar{\gamma}$ y que toda la sucesión $W(\zeta; m, \kappa) \rightarrow \bar{W}$ uniformemente.

Pero, antes de seguir, veamos qué sucede cuando $\kappa = 0$. En este caso conocemos todo explícitamente: $\gamma(m, 0) = m - 1$, $W(\zeta; m, 0) = (1 - \zeta^2)/2$. Es evidente que:

$$\begin{aligned} \gamma(m, 0) &\rightarrow 0 \equiv \bar{\gamma}(0); \\ W(\zeta; m, 0) &\text{ converge uniformemente a } \bar{W}(\zeta; 0) = (1 - \zeta^2)/2; \\ W'(\zeta; m, 0) &\text{ converge uniformemente a } \bar{W}'(\zeta; 0) = -\zeta \leq 0; \\ 0 &\geq \bar{W}''(\zeta) = -1 \geq -2C_1; \\ \bar{W} &\text{ es solución de (2) con } \gamma = \bar{\gamma}(0) = 0. \end{aligned}$$

De hecho, sólo existe solución clásica de (2) con $\kappa = 0$ si $\gamma = 0$. Para ver esto basta con imponer que $W'(0) = 0$ en la ecuación. Además, sólo hay una solución clásica para dichos valores de γ y κ , precisamente $\bar{W}(\zeta; 0)$. En efecto, una solución tal verifica que $W'(W' + \zeta) = 0$, luego, o bien $W' = 0$, o bien $W' = -\zeta$. La condición de contorno en $\zeta = 1$ implica que en un entorno a la izquierda de ese punto estamos sobre la rama $W' = -\zeta$. La continuidad de la derivada implica que no podemos pasar a la otra rama salvo en $\zeta = 0$. Así pues, $W' = -\zeta$ para todo ζ en $(0, 1)$. Integrando esta ecuación en $(\zeta, 1)$ obtenemos que $W = (1 - \zeta^2)/2$, es decir, $W = \bar{W}$.

El siguiente lema muestra que W es decreciente en $0 \leq \zeta < 1$.

Lema 1.1. Sea $\kappa \geq 0$. Si $W \in C^1([0, 1])$ es solución de (2), entonces $W'(\zeta) \leq 0$ en $0 \leq \zeta \leq 1$.

Prueba. El caso $\kappa = 0$ se prueba haciendo el cálculo explícitamente. Sea ahora $\kappa > 0$. Supongamos que existe $\bar{\zeta}$, $0 < \bar{\zeta} < 1$, tal que $W'(\bar{\zeta}) > 0$. Sea ζ_1 el primer punto a la izquierda de $\bar{\zeta}$ tal que $W'(\zeta_1) = 0$ y ζ_2 el primer punto a la derecha de $\bar{\zeta}$ donde $W'(\zeta_2) = 0$. Evidentemente

$$0 < W(\zeta_1) < W(\zeta_2),$$

contradiciendo que $W(\zeta_i) = \gamma/\kappa$. \square

Observación. Si $\kappa > 0$ entonces $W(0) = \gamma/\kappa$. Así, tenemos que $\gamma > 0$. Además $W(\zeta) \leq \gamma/\kappa$.

A continuación estudiamos con más detalle la estructura de las soluciones cuando $\kappa > 0$. La derivada W' satisface, o bien

$$W' = \frac{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4W(\gamma - \kappa W)}}{2} \equiv f_+,$$

o bien

$$W' = \frac{-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 4W(\gamma - \kappa W)}}{2} \equiv f_-.$$

Evidentemente, en un entorno a la izquierda de $\zeta = 1$, $W' = f_-$. Por ser $W \in C^1([0, 1])$, sólo se puede producir una transición a la rama f_+ en puntos donde se anule el discriminante $\Phi \equiv \zeta^2 - 4W(\gamma - \kappa W)$. Dichos puntos forman la elipse

$$\frac{\zeta^2}{\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\kappa}}\right)^2} + \frac{\left(W - \frac{\gamma}{2\kappa}\right)^2}{\left(\frac{\gamma}{2\kappa}\right)^2} = 1.$$

La solución no puede entrar al interior de la elipse, ya que allí el discriminante es negativo. Por tanto, si la gráfica de la función toca a la elipse tiene que ser tangente a ella. Esto implica que los puntos $\bar{\zeta}$ de posible contacto verifican que

$$-\frac{\bar{\zeta}}{2} = -\frac{\bar{\zeta}}{2\sqrt{\gamma^2 - \kappa\bar{\zeta}^2}}.$$

Así,

$$(1.5) \quad \bar{\zeta}^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{\kappa} \quad \text{y} \quad W(\bar{\zeta}) = \frac{\gamma + 1}{2\kappa}.$$

Por consiguiente, sólo puede haber contacto con la elipse para $\zeta \in (0, 1)$ si $\gamma > 1$ y dicho contacto únicamente se puede producir en un punto. De hecho, veremos a continuación que si $\gamma > 1$ el contacto se produce y que, además, hay una transición a la rama f_+ . El punto $\zeta = 0$, $W(0) = \gamma/\kappa$ está sobre la elipse. Veamos que si $\gamma > 1$ se sale de dicho punto a lo largo de la rama f_+ . El discriminante es una función derivable de ζ . Su derivada viene dada por

$$\Phi'(\zeta) = 2((\zeta + 2W') + 2((2\kappa W - (1 + \gamma))W')).$$

Ahora bien, $2\kappa W - (1 + \gamma) > 0$ en un entorno del origen y, si salimos a lo largo de la rama negativa f_- , también tenemos que $\zeta + 2W' < 0$ y que $W' < 0$ en un entorno a la derecha de $\zeta = 0$. Pero esto implica que $\Phi'(\zeta) < 0$, algo imposible, ya que entraríamos en la región prohibida $\{\Phi < 0\}$. Concluimos que se sale del origen siguiendo la rama f_+ . Se debe producir un cambio a la rama f_- , y esto sólo puede ocurrir en $(\bar{\zeta}, (\gamma + 1)/2\kappa)$.

Estamos ya en condiciones de probar la unicidad del exponente de autosemejanza γ , lo que permite definir un función $\gamma = \gamma(\kappa)$.

Lema 1.2. Dado $\kappa \geq 0$ sólo hay un valor de γ , $\gamma(\kappa)$, tal que el problema (2) tiene solución.

Prueba. El caso $\kappa = 0$ ya lo hemos visto. Sea, pues, $\kappa > 0$. Supongamos que hay dos valores de γ , $\gamma_+ > \gamma_-$, que conducen a soluciones W_+ y W_- respectivamente. Un sencillo cálculo muestra que, si $2W' + \zeta \neq 0$ (como es el caso en $\zeta = 1$), la derivada segunda viene dada por

$$W''(\zeta) = \frac{W'(2\kappa W - 1 - \gamma)}{2W' + \zeta}.$$

Por tanto, $W''(1^-) = -(1 + \gamma)$. Así pues, $W''_+(1^-) < W''_-(1^-)$. Hay un entorno a la izquierda de $\zeta = 1$ en el que $W'_+ > W'_-$ y $W_+ < W_-$. De hecho, la última desigualdad es cierta para todo $\zeta \in (0, 1)$. En efecto, si W_+ y W_- se cruzan en $(0, 1)$, en el primer punto de cruce, $\zeta = \zeta_1$, a la izquierda de $\zeta = 1$ se tiene $W_+(\zeta_1) = W_-(\zeta_1)$ y $W'_+(\zeta_1) \leq W'_-(\zeta_1)$. Ahora bien, el punto de transición de una rama a otra es $\bar{\zeta}_+ = (\gamma_+^2 - 1)^{1/2}/\kappa^{1/2}$ para la solución W_+ y $\bar{\zeta}_- = (\gamma_-^2 - 1)^{1/2}/\kappa^{1/2}$ para la solución W_- . Así, $\bar{\zeta}_+ > \bar{\zeta}_-$ y sólo hay tres posibilidades:

- (a) $W'_+ = f_-$ y $W'_- = f_-$ en el punto ζ_1 ;
- (b) $W'_+ = f_+$ y $W'_- = f_-$ en el punto ζ_1 ;
- (c) $W'_+ = f_+$ y $W'_- = f_+$ en el punto ζ_1 .

Si estamos en los casos (a) o (b), es fácil ver que $W'_+(\zeta_1) > W'_-(\zeta_1)$, lo que es imposible. Queda el caso (c), que sólo puede suceder si $\gamma_+ > \gamma_- \geq 1$. Ahora bien, en este caso $\zeta_1 < \bar{\zeta}_+$. Así, $W_+(\bar{\zeta}_+) < W_-(\bar{\zeta}_+)$. Dado que $W_-(\bar{\zeta}_+) < W_-(\bar{\zeta}_-)$ debido a la monotonía estricta de W_- , concluimos que $W_+(\bar{\zeta}_+) < W_-(\bar{\zeta}_-)$, es decir, $(1 + \gamma_+)/\kappa < (1 + \gamma_-)/\kappa$, lo que también es imposible.

Tenemos por tanto que $W_+(\zeta) \leq W_-(\zeta)$ para todo ζ en $[0, 1]$. Pero esto contradice el hecho de que $W_+(0) = \gamma_+/\kappa > \gamma_-/\kappa = W_-(0)$. \square

No sólo hay unicidad del exponente de autosemejanza. También se tiene unicidad para la solución.

Lema 1.3. Sean $\kappa \geq 0$ y $\gamma = \gamma(\kappa)$ tales que existe una solución clásica de (2). Dicha solución es única.

Prueba. El caso $\kappa = 0$ ya lo hemos visto. Sea pues $\kappa > 0$. Si $\gamma \leq 1$, tenemos que

$$W' = -\frac{\zeta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\zeta^2 - 4W(\gamma - \kappa W)} \equiv f_-(\zeta, W).$$

Como el discriminante, Φ , es distinto de 0 si $\zeta \in (0, 1]$, f_- es analítica a lo largo de una solución salvo en $\zeta = 0$. La unicidad local de soluciones produce el resultado.

Si $\gamma > 1$, también tenemos unicidad de soluciones mientras nos movemos por la rama f_- , es decir, en $[\bar{\zeta}, 1]$, donde $\bar{\zeta}$ es el punto de transición dado en (1.5). En $[0, \bar{\zeta}]$ nos movemos por la rama f_+ , que no es Lipschitz en ninguno de los extremos del intervalo. La solución se podría bifurcar en varias a la izquierda de $\bar{\zeta}$. Sin embargo, f_+ es Lipschitz en $(0, \bar{\zeta})$ a lo largo de soluciones. Por tanto, si la solución se bifurca en dos ramas diferentes, éstas estarán estrictamente ordenadas en $(0, \bar{\zeta})$. Veamos que esto conduce a una contradicción. Supongamos que hay dos soluciones diferentes W_+ y W_- , con $W_+ > W_-$ en $(0, \bar{\zeta})$. En ese intervalo,

$$W'_+ - W'_- = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\zeta^2 + 4\kappa \left(W_+ - \frac{\gamma}{2\kappa}\right) - \frac{\gamma^2}{\kappa}} - \sqrt{\zeta^2 + 4\kappa \left(W_- - \frac{\gamma}{2\kappa}\right) - \frac{\gamma^2}{\kappa}} \right) > 0.$$

Fijamos un punto cualquiera $\zeta_1 \in (0, \bar{\zeta})$, e integramos la desigualdad anterior en $(\zeta_1, \bar{\zeta})$. Obtenemos que

$$W_+(\bar{\zeta}) - W_-(\bar{\zeta}) > W_+(\zeta_1) - W_-(\zeta_1) > 0,$$

contradiciendo el hecho de que $W_+(\bar{\zeta}) = W_-(\bar{\zeta})$. \square

Los dos lemas anteriores producen el siguiente resultado:

Teorema 1.4. Sea $\kappa \geq 0$ fijo. Dado $m > 1$, sea $\gamma(m, \kappa)$ el único valor de γ tal que (1) tiene solución, y sea $W(\zeta; m, \kappa)$ la solución (única) correspondiente. Sea $\gamma(1, \kappa)$ el único valor de γ tal que (2) tiene solución clásica, y sea $W(\zeta; 1, \kappa)$ la solución (única) correspondiente. Las siguientes proposiciones son ciertas:

- (i) $\gamma(m, \kappa) \rightarrow \gamma(1, \kappa)$ cuando $m \downarrow 1$;
- (ii) $W(\zeta; m, \kappa) \rightarrow W(\zeta; 1, \kappa)$ uniformemente en $[0, 1]$ cuando $m \downarrow 1$;
- (iii) $W'(\zeta; m, \kappa) \rightarrow W'(\zeta; 1, \kappa)$ uniformemente en $[0, 1]$ cuando $m \downarrow 1$;
- (iv) $0 \geq W''(\zeta; 1, \kappa) \geq -C_1(\kappa + 2)$ con $C_1 = (1 + \sqrt{129})/4$.

El siguiente teorema contiene varias propiedades de la función $\gamma = \gamma(1, \kappa)$.

Teorema 1.5. Sea $\kappa \geq 0$. La función $\gamma(1, \kappa)$ tiene las siguientes propiedades:

- (i) es estrictamente monótona creciente;
- (ii) es continua;
- (iii) $\gamma(1, \kappa) \leq \kappa/2$;
- (iv) $\gamma(1, \kappa) \geq -1 + \sqrt{1 + \kappa/2C_1}$;
- (v) si $\gamma(1, \kappa) > 1$, $\gamma(1, \kappa) < \sqrt{\kappa + 1}$.

Prueba. (i) Las funciones $\gamma(m, \kappa)$ son estrictamente monótonas crecientes. Por consiguiente, si $\kappa_- < \kappa_+$, entonces $\gamma(m, \kappa_-) < \gamma(m, \kappa_+)$. Pasando al límite llegamos a $\gamma(1, \kappa_-) \leq \gamma(1, \kappa_+)$. Para obtener la monotonía estricta tenemos que descartar la posibilidad de que $\gamma(1, \kappa_-) = \gamma(1, \kappa_+) \equiv \tilde{\gamma}$. Supongamos que fuera cierto. Denotamos por W_- a la solución correspondiente a $(\kappa_-, \tilde{\gamma})$ y por W_+ a la solución correspondiente a $(\kappa_+, \tilde{\gamma})$. Un sencillo cálculo muestra que, si $2W' + \zeta \neq 0$ (como es el caso en $\zeta = 1$), la derivada tercera de una solución de (2) viene dada por

$$W'''(\zeta) = \frac{W''(-2W'' + 2\kappa W - 2 - \gamma) + 2\kappa W'^2}{2W' + \zeta}.$$

Por tanto, $W'''(1^-) = -2\kappa + (1 + \gamma)\gamma$. Así pues, $W'''_+(1^-) < W'''_-(1^-)$. Hay un entorno a la izquierda de $\zeta = 1$ en el que $W''_+ > W''_-$, $W'_+ < W'_-$ y $W_+ > W_-$. De hecho, la última desigualdad es cierta para todo $\zeta \in (0, 1)$. En efecto, si W_+ y W_- se cruzan en $(0, 1)$, en el primer punto de cruce, $\zeta = \zeta_1$, a la izquierda de $\zeta = 1$ se tiene que $W_+(\zeta_1) = W_-(\zeta_1)$ y que $W'_+(\zeta_1) \geq W'_-(\zeta_1)$. Ahora bien, el punto de transición de una rama a otra es $\bar{\zeta}_+ = (\tilde{\gamma}^2 - 1)^{1/2}/\kappa_+^{1/2}$ para la solución W_+ y $\bar{\zeta}_- = (\tilde{\gamma}^2 - 1)^{1/2}/\kappa_-^{1/2}$ para la solución W_- . Así, $\bar{\zeta}_+ < \bar{\zeta}_-$ y sólo hay tres posibilidades:

- (a) $W'_+ = f_-$ y $W'_- = f_-$ en el punto ζ_1 ;
- (b) $W'_+ = f_-$ y $W'_- = f_+$ en el punto ζ_1 ;
- (c) $W'_+ = f_+$ y $W'_- = f_+$ en el punto ζ_1 .

Si estamos en los casos (a) o (b), es fácil ver que $W'_+(\zeta_1) < W'_-(\zeta_1)$, lo que es imposible. Queda el caso (c), que sólo puede suceder si $\tilde{\gamma} > 1$ (y, por tanto, $\kappa_- \neq 0$). Ahora bien, en este caso $\zeta_1 < \bar{\zeta}_-$. Así, $W_-(\bar{\zeta}_-) < W_+(\bar{\zeta}_-)$. Dado que $W_+(\bar{\zeta}_-) < W_+(\bar{\zeta}_+)$, debido a la monotonía estricta de W_+ , concluimos que $W_-(\bar{\zeta}_-) < W_+(\bar{\zeta}_+)$, es decir, $(1 + \tilde{\gamma})/\kappa_- < (1 + \tilde{\gamma})/\kappa_+$, lo que también es imposible.

Tenemos, por tanto, que $W_+(\zeta) \geq W_-(\zeta)$ para todo ζ en $[0, 1]$. Pero esto contradice el hecho de que $W_+(0) = \tilde{\gamma}/\kappa_+ < \tilde{\gamma}/\kappa_- = W_-(0)$.

(ii) Supongamos que $\gamma(1, \kappa)$ es discontinua en un punto $\kappa_0 > 0$, y sea $\{\kappa_n\} \subset \mathbb{R}^+$ una sucesión tal que

$$\kappa_n \rightarrow \kappa_0 \quad \text{y} \quad \gamma_n = \gamma(1, \kappa_n) \rightarrow \gamma^* \neq \gamma(1, \kappa_0) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Sea $\{W_n\}$ la sucesión de las correspondientes soluciones. Por ser $\{\kappa_n\}$ una sucesión convergente tenemos que $0 \leq \kappa_n \leq M$ y, utilizando el corolario 1.4, podemos afirmar que

$$\begin{aligned}
1 &\geq W_n \geq 0 \text{ para } 0 \leq \zeta \leq 1; \\
0 &\geq W'_n \geq -1 \text{ para } 0 \leq \zeta \leq 1; \\
0 &\geq W'_n \geq -C_1(M+2) \text{ para } 0 \leq \zeta \leq 1.
\end{aligned}$$

Hay, por tanto, una subsucesión, a la que también denotamos por W_n , y una función W_0 , tales que $W_n \rightarrow W_0$ y $W'_n \rightarrow W'_0$ uniformemente en $[0, 1]$. Pasando al límite en (2) deducimos que W_0 es una solución de (2) correspondiente a κ_0 y γ^* . La unicidad del exponente γ (lema 1.2) implica que $\gamma^* = \gamma(1, \kappa_0)$, una contradicción.

(iii) En el capítulo II vimos que $H \equiv w' + (1-\mu)\zeta \geq 0$, lo que implica que $W'(\zeta; m, \kappa) \geq -\zeta$. Pasando al límite $m \downarrow 1$ obtenemos que $W'(\zeta; 1, \kappa) \geq -\zeta$. Integrando en $(0, 1)$ se llega a $W(0; 1, \kappa) \leq 1/2$. Si $\kappa > 0$, entonces $W(0; 1, \kappa) = \gamma(1, \kappa)/\kappa$, y el resultado se obtiene de inmediato. Si $\kappa = 0$, $\gamma(1, 0) = 0$ y la desigualdad es trivial.

(iv) La desigualdad es trivial si $\kappa = 0$. Sea, pues, $\kappa > 0$. Multiplicamos la estimación de semiconvexidad (1.3) por $W'(\zeta; m, \kappa)$, integramos en $(0, 1)$ y pasamos al límite $m \downarrow 1$. Obtenemos que

$$\frac{1}{2} \leq C_1(\gamma(1, \kappa) + 2)W(0).$$

Utilizando que $W(0) = \gamma(1, \kappa)/\kappa$ llegamos a

$$\gamma(1, \kappa)(\gamma(1, \kappa) + 2) \geq \frac{\kappa}{2C_1},$$

o lo que es lo mismo,

$$(\gamma(1, \kappa) + 1)^2 \geq 1 + \frac{\kappa}{2C_1}$$

de donde se concluye el resultado.

(v) Si $\gamma(1, \kappa) > 1$, se produce una transición de una rama de la derivada a la otra en el punto $\bar{\zeta} = (\gamma^2(1, \kappa) - 1)^{1/2}/\kappa^{1/2}$. El resultado se obtiene observando que $\bar{\zeta}$ es menor que uno. \square

La estimación (iv) del teorema demuestra en particular que $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \gamma(1, \kappa) = \infty$. Así pues, la función $\kappa = \kappa(\gamma)$, inversa de $\gamma(1, \kappa)$ está definida para todo $\gamma \geq 0$. Sus propiedades son también corolario del teorema 1.5.

Corolario 1.6. *Para todo $\gamma \geq 0$ existe un único $\kappa \geq 0$, $\kappa(\gamma)$, tal que el problema (2) tiene solución. La función $\kappa = \kappa(\gamma)$ tiene las siguientes propiedades:*

- (i) *es estrictamente monótona creciente;*
- (ii) *es continua;*
- (iii) $\kappa(\gamma) \geq 2\gamma$;
- (iv) $\kappa(\gamma) \leq 2C_1((\gamma + 1)^2 - 1)$;
- (v) *si $\gamma > 1$, $\kappa(\gamma) \geq \gamma^2 - 1$.*

2. Continuación de la rama para valores de κ negativos

Igual que en el caso $m > 1$, queremos saber si la rama de exponentes, $\gamma = \gamma(\kappa)$, para los cuales existe una solución clásica de (2) se puede extender a valores de κ negativos. La respuesta es afirmativa si $\kappa > -\pi^2$.

Teorema 2.1. *Sea κ verificando que $-\pi^2 < \kappa < 0$. Existe un único valor de γ , que es menor que cero, tal que el problema (2) tiene solución clásica.*

Prueba. (a) $\gamma < 0$. Es consecuencia inmediata de que $W(0) = \gamma/\kappa > 0$.

(b) *Existencia.* Sean $\widehat{W} = W/|\gamma|$ y $\sigma = 1/|\gamma|$. Entonces

$$(2.1) \quad \begin{cases} \widehat{W}'(\widehat{W}' + \sigma\zeta) + \widehat{W}(|\kappa|\widehat{W} - 1) = 0 & \text{si } 0 < \zeta < 1, \\ \widehat{W}(\zeta) > 0 & \text{si } 0 \leq \zeta < 1, \\ \widehat{W}'(0) = 0, \widehat{W}(1) = 0 \text{ y } \widehat{W}'(1) = -\sigma. \end{cases}$$

Necesitamos el siguiente resultado de existencia local y dependencia continua de soluciones.

Lema 2.2. *Sea $\kappa < 0$ fijo. Para todo $\sigma \geq 0$ existe una única solución clásica local, $\widehat{W}(\zeta; \kappa, \sigma)$, del problema (2.1) en un entorno de $\zeta = 1$. Tanto $\widehat{W}(\zeta; \kappa, \sigma)$ como $\widehat{W}'(\zeta; \kappa, \sigma)$ dependen de σ de forma continua uniformemente en ζ .*

Prueba. Si $\sigma > 0$,

$$(2.2) \quad \widehat{W}' = -\frac{1}{2} \left(\sigma\zeta + \sqrt{(\sigma\zeta)^2 + 4\widehat{W}(1 - |\kappa|\widehat{W})} \right)$$

en un entorno a la izquierda de $\zeta = 1$, y el resultado es consecuencia de la teoría estándar de ecuaciones diferenciales ordinarias. En cuanto al caso $\sigma = 0$, es fácil calcular explícitamente la única solución local, que viene dada por

$$(2.3) \quad \widehat{W}(\zeta; \kappa, 0) = \frac{1}{|\kappa|} \sin^2 \left(\frac{\sqrt{|\kappa|}}{2} (1 - \zeta) \right).$$

La única dificultad aparece, por tanto, cuando intentamos extender el resultado de dependencia continua hasta $\sigma = 0$.

Sea $\sigma > 0$. Las soluciones locales $\widehat{W}(\zeta; \sigma, \kappa)$ se pueden extender hacia la izquierda al menos hasta que $\widehat{W} = 1/|\kappa|$, viniendo dada la derivada por (2.2). Veamos que las soluciones dependen monótonamente de σ . Sean $\widehat{W}_+(\zeta) = \widehat{W}(\zeta; \sigma_+, \kappa)$ y $\widehat{W}_-(\zeta) = \widehat{W}(\zeta; \sigma_-, \kappa)$, con $\sigma_- < \sigma_+$. Obviamente, $\widehat{W}'_-(1) > \widehat{W}'_+(1)$ y en consecuencia existe un entorno a la izquierda de $\zeta = 1$ en el que $\widehat{W}_- < \widehat{W}_+$. De hecho, esta desigualdad es cierta mientras que ambas soluciones valgan menos que $1/|\kappa|$ y estemos en el intervalo $(0, 1)$. Si no fuera así, habría un primer punto $\bar{\zeta}$ a la izquierda de $\zeta = 1$ tal que $\widehat{W}_- = \widehat{W}_+$. En dicho punto $\widehat{W}'_-(\bar{\zeta}) \leq \widehat{W}'_+(\bar{\zeta})$.

Ahora bien, las cantidades W'_\pm y $(W'_\pm + \sigma\zeta)$ son negativas mientras que las soluciones no alcancen la altura $1/|\kappa|$ y no lleguen a $\zeta = 0$. En consecuencia, en $\bar{\zeta}$ tenemos que

$$\widehat{W}'_-(\widehat{W}'_- + \sigma_- \bar{\zeta}) > \widehat{W}'_+(\widehat{W}'_+ + \sigma_+ \bar{\zeta}),$$

contradiciendo el hecho de que

$$\widehat{W}'_-(\widehat{W}'_- + \sigma_- \bar{\zeta}) = \widehat{W}'_+(\widehat{W}'_+ + \sigma_+ \bar{\zeta}).$$

Sea $\bar{\zeta} = \inf \{a \in [0, 1] : \widehat{W}(\zeta; 1/2, \kappa) \leq 1/(4|\kappa|) \text{ en } [a, 1]\}$. La función $\widehat{W}(\zeta; \sigma, \kappa)$ está bien definida en $I = [\bar{\zeta}, 1]$ para todo $0 < \sigma \leq 1/2$ y

$$(2.4) \quad 0 \leq \widehat{W}(\zeta; \sigma, \kappa) \leq 1/(4|\kappa|), \quad \zeta \in I, \quad 0 < \sigma \leq 1/2.$$

En cuanto a las derivadas, tenemos la siguiente estimación:

$$(2.5) \quad 0 > \widehat{W}'(\zeta; \sigma, \kappa) \geq -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sqrt{(1/2) + 1/(4|\kappa|)}, \quad \zeta \in I, \quad 0 < \sigma \leq 1/2.$$

Las derivadas segundas vienen dadas por

$$\widehat{W}''(\zeta; \sigma, \kappa) = \frac{(1 - \sigma - 2|\kappa|\widehat{W})\widehat{W}'}{2\widehat{W}' + \sigma\zeta}.$$

Es fácil ver que $(1 - \sigma - 2|\kappa|\widehat{W}) > 0$ y que tanto \widehat{W}' como el denominador son negativos en el intervalo I para todo $\sigma \in (0, 1/2]$. Por consiguiente, $\widehat{W}'' > 0$. Sea $\phi = \widehat{W}'/(2\widehat{W}' + \sigma\zeta)$. Su derivada vale

$$\phi'(\zeta; \sigma, \kappa) = \frac{\sigma(\zeta\widehat{W}'' - \widehat{W}')}{(2\widehat{W}' + \sigma\zeta)^2}.$$

Así pues, $\phi' \geq 0$ en I . Como por otra parte $\phi \geq 0$ en I y $\phi(1) = 1$, concluimos que $\phi \leq 1$ en I . Llegamos finalmente a las siguientes estimaciones *a priori*:

$$(2.6) \quad 0 < \widehat{W}''(\zeta; \sigma, \kappa) \leq 1 \quad \text{si } \zeta \in I \text{ y } 0 < \sigma \leq 1/2.$$

Sea $\{\sigma_n\}$ una sucesión tal que $\sigma_n \rightarrow 0$, y sea $\widehat{W}_n = \widehat{W}(\zeta; \sigma_n, \kappa)$. Queremos ver que, necesariamente, $\widehat{W}_n \rightarrow \widehat{W}(\zeta; 0, \kappa)$ y $\widehat{W}'_n \rightarrow \widehat{W}'(\zeta; 0, \kappa)$ uniformemente sobre compactos. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $0 < \sigma_n \leq 1/2$. Usando las estimaciones (2.4)–(2.6) tenemos garantizada la existencia de una subsucesión, a la que también denotamos por $\{\widehat{W}_n\}$, y de una función $\widetilde{W}(\zeta; \kappa) \in C^1(I)$ tales que:

$$\begin{aligned} \widehat{W}_n &\equiv \widehat{W}(\zeta; \sigma_n, \kappa) \rightarrow \widetilde{W}(\zeta; \kappa) \text{ uniformemente en } I; \\ \widehat{W}'_n &\rightarrow \widetilde{W}' \text{ uniformemente en } I; \\ \widetilde{W}(1) &= 0, \quad \widetilde{W}'(1) = 0; \\ \widetilde{W} &\text{ verifica la ecuación } (\widetilde{W}')^2 + \widetilde{W}(|\kappa|\widetilde{W} - 1) = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, a partir de (2.2) observamos que

$$\widehat{W}'(\zeta; \sigma, \kappa) \leq -\sqrt{\widehat{W}(1 - |\kappa|\widehat{W})},$$

al menos mientras \widehat{W} no alcance la altura $1/|\kappa|$. Integrando esta desigualdad en $(\zeta, 1)$ e imponiendo que $\widehat{W}(1; \sigma, \kappa) = -\sigma$ obtenemos que

$$\widehat{W}(\zeta; \sigma, \kappa) \geq \frac{1}{|\kappa|} \sin^2 \left(\frac{\sqrt{|\kappa|}}{2} (1 - \zeta) \right) \quad \text{para } \zeta \in I.$$

La función del segundo miembro de la desigualdad es precisamente $\widehat{W}(\zeta; 0, \kappa)$, que es claramente mayor que cero en $[0, 1]$ si $|\kappa| < \pi^2$. Por consiguiente, $\widetilde{W}(\zeta; \kappa) = \widehat{W}(\zeta; 0, \kappa)$. La unicidad del límite implica que el resultado de convergencia es válido para toda la sucesión, lo que concluye la demostración del lema. \square

La prueba de existencia prosigue así. Para κ verificando que $-\pi^2 < \kappa < 0$ fijo y $\sigma \geq 0$ variable la solución local que empieza en $\zeta = 1$ presenta uno de los siguientes tres comportamientos:

- (i) hay un valor $\bar{\zeta} \in (0, 1)$ tal que $\widehat{W}(\bar{\zeta}; \sigma, \kappa) = 1/|\kappa|$;
- (ii) $\widehat{W}(\zeta; \sigma, \kappa) < 1/|\kappa|$ en $[0, 1]$;
- (iii) $\widehat{W}(\zeta; \sigma, \kappa) < 1/|\kappa|$ en $(0, 1)$ y $\widehat{W}(0; \sigma, \kappa) = 1/|\kappa|$.

Si se da el tercer comportamiento para un valor $\sigma > 0$, $\widehat{W}'(0) = 0$. Estamos, por tanto, ante una solución del problema (2.1) que produce, deshaciendo el cambio de escala, una solución de (2). Consideramos tres subconjuntos de $[0, \infty)$:

- $A = \{\sigma \in [0, \infty) : \text{se da el comportamiento (i)}\};$
- $B = \{\sigma \in [0, \infty) : \text{se da el comportamiento (ii)}\};$
- $C = \{\sigma \in [0, \infty) : \text{se da el comportamiento (iii)}\}.$

Si $\sigma > 4/|\kappa|$, $\sigma \in A$. En efecto, en caso contrario la solución se podría extender hasta $\zeta = 0$ verificando (2.2) en todo $(0, 1)$. Por tanto, $\widehat{W}'(\zeta; \sigma, \kappa) \leq -\sigma\zeta/2$. Integrando esta desigualdad en $(0, 1)$, obtenemos que $\widehat{W}(0) \geq \sigma/4$, lo que es imposible a menos que se de el comportamiento (i). Por otra parte, se comprueba fácilmente utilizando la fórmula explícita (2.3) para $\widehat{W}(\zeta; 0, \kappa)$ que $\sigma = 0 \in B$. En efecto, si $-\pi^2 < \kappa < 0$, $\widehat{W}(\zeta; 0, \kappa) < 1/|\kappa|$ en $[0, 1]$. Dado que A y B son, además de no vacíos, conjuntos abiertos (es aquí donde se utiliza la dependencia continua) concluimos, por ser $[0, \infty)$ conexo, que C es no vacío.

(c) *Unicidad.* Sea $\widehat{W} = W/|\gamma|$. Entonces

$$(2.7) \quad \begin{cases} \widehat{W}' \left(\widehat{W}' + \frac{\zeta}{|\gamma|} \right) + \left(-\widehat{W} + |\kappa|\widehat{W}^2 \right) = 0 & \text{si } 0 < \zeta < 1, \\ \widehat{W}(\zeta) > 0 & \text{si } 0 \leq \zeta < 1, \\ \widehat{W}'(0) = 0, \widehat{W}(1) = 0 \text{ y } \widehat{W}'(1) = -1/|\gamma|. \end{cases}$$

La segunda y tercera condición implican que $\widehat{W}(0) = 1/|\kappa|$. Por otra parte, la prueba del lema 1.1 es también válida cuando $\kappa < 0$. Tenemos por tanto el siguiente resultado:

Lema 2.3. Sea $\kappa < 0$. Si $W \in C^1([0, 1])$ es solución de (2) entonces $W'(\zeta) < 0$ en $0 < \zeta < 1$.

Combinando ambos hechos, se tiene que $\widehat{W}' + \zeta/|\gamma| \leq 0$.

Supongamos que hubiera dos soluciones, \widehat{W}_+ y \widehat{W}_- , correspondientes a $|\gamma_+|$ y $|\gamma_-|$ respectivamente ($|\gamma_+| > |\gamma_-|$). Dado que $\widehat{W}'_+(1) > \widehat{W}'_-(1)$, hay un entorno a la izquierda de $\zeta = 1$ en el que $\widehat{W}_+ < \widehat{W}_-$. De hecho, esta desigualdad es cierta para todo $\zeta \in (0, 1)$. En caso contrario, habría un primer punto $\bar{\zeta}$ a la izquierda de $\zeta = 1$ tal que $\widehat{W}_+ = \widehat{W}_-$. En dicho punto $\widehat{W}'_+(\bar{\zeta}) \leq \widehat{W}'_-(\bar{\zeta})$. Así,

$$\widehat{W}'_-(\bar{\zeta}) \left(\widehat{W}'_-(\bar{\zeta}) + \frac{\bar{\zeta}}{|\gamma_-|} \right) < \widehat{W}'_+(\bar{\zeta}) \left(\widehat{W}'_+(\bar{\zeta}) + \frac{\bar{\zeta}}{|\gamma_+|} \right),$$

contradiciendo el hecho de que ambas funciones son solución, cada una para el valor de γ correspondiente, de (2.7). De esta forma, $\widehat{W}_- > \widehat{W}_+$, para todo $\zeta \in (0, 1)$, mientras que $\widehat{W}_+(0) = \widehat{W}_-(0) = 1/|\kappa|$ y $\widehat{W}_+(1) = \widehat{W}_-(1) = 0$. Probemos que esto es imposible.

Sean ζ_+ y ζ_- con $0 < \zeta_+ < \zeta_-$, puntos tales que $\widehat{W}_-(\zeta_-) = \widehat{W}_+(\zeta_+)$. Vamos a ver que $\widehat{W}'_-(\zeta_-) < \widehat{W}'_+(\zeta_+)$. Si no fuera cierto, entonces

$$\widehat{W}'_-(\zeta_-) \left(\widehat{W}'_-(\zeta_-) - \frac{\zeta_-}{|\gamma_-|} \right) < \widehat{W}'_+(\zeta_+) \left(\widehat{W}'_+(\zeta_+) - \frac{\zeta_+}{|\gamma_+|} \right),$$

contradiciendo el hecho de que ambas funciones son solución de la ecuación.

Lo que acabamos de ver es que $\zeta'_- > \zeta'_+$, donde ζ_- y ζ_+ son las funciones inversas de \widehat{W}_- y \widehat{W}_+ respectivamente. Así pues, $J(\widehat{W}) = \zeta_- - \zeta_+$ es monótona creciente. Dado que $J(1/(2|\kappa|)) = \delta > 0$, tenemos que $J(1/|\kappa|) \geq \delta > 0$, en contradicción con el hecho de que $J(1/|\kappa|) = 0$. \square

Observación. No hay dos soluciones diferentes con γ y $|\kappa|$ iguales. De hecho,

$$W' = \frac{-\zeta - \sqrt{\zeta^2 + 4W(|\gamma| - W)/|\kappa|}}{(2/|\kappa|)} \equiv f(\zeta, W),$$

con f analítica a lo largo de una solución, excepto en $\zeta = 0$. La unicidad local de soluciones produce el resultado.

El teorema 2.1 permite definir una función $\gamma(\kappa)$ en $(-\pi^2, 0)$. Dicha función resulta ser monótona creciente.

Teorema 2.4. La función $\gamma(\kappa)$ es estrictamente monótona creciente en $(-\pi^2, 0)$.

Prueba. Sea $\widehat{W} = |\kappa|W/|\gamma|$. Entonces

$$(2.8) \quad \begin{cases} \widehat{W}' \left(\frac{\widehat{W}'}{|\kappa|} + \frac{\zeta}{|\gamma|} \right) + (-\widehat{W} + \widehat{W}^2) = 0 & \text{si } 0 < \zeta < 1, \\ \widehat{W}(\zeta) > 0 & \text{si } 0 \leq \zeta < 1, \\ \widehat{W}'(0) = 0, \widehat{W}(1) = 0 \text{ y } \widehat{W}'(1) = -|\kappa|/|\gamma|. \end{cases}$$

La segunda y tercera condición implican que $\widehat{W}(0) = 1$. Por otra parte, $\widehat{W}' \leq 0$, y por tanto $\widehat{W}'/|\kappa| + \zeta/|\gamma| \leq 0$.

Vamos a probar que si los pares (κ_-, γ_-) y (κ_+, γ_+) producen una solución, entonces $|\kappa_-| < |\kappa_+|$ implica que $|\gamma_-| < |\gamma_+|$. Si esto último no fuera cierto, tendríamos que $\widehat{W}'_+(1) < \widehat{W}'_-(1)$, de donde $\widehat{W}_+ > \widehat{W}_-$ en un entorno a la izquierda de $\zeta = 1$. De hecho, esta desigualdad es cierta para todo $\zeta \in (0, 1)$. En efecto, si no fuera cierta habría un primer punto, $\bar{\zeta}$, a la izquierda de $\zeta = 1$ tal que $\widehat{W}_+ = \widehat{W}_-$. En dicho punto $\widehat{W}'_+(\bar{\zeta}) \geq \widehat{W}'_-(\bar{\zeta})$. Por tanto,

$$\widehat{W}'_+(\bar{\zeta}) \left(\frac{\widehat{W}'_+(\bar{\zeta})}{|\kappa_+|} + \frac{\bar{\zeta}}{|\gamma_+|} \right) < \widehat{W}'_-(\bar{\zeta}) \left(\frac{\widehat{W}'_-(\bar{\zeta})}{|\kappa_-|} + \frac{\bar{\zeta}}{|\gamma_-|} \right),$$

contradiendo el hecho de que ambas funciones son solución de la ecuación. La situación es, por tanto, la siguiente: $\widehat{W}_+ > \widehat{W}_-$, para todo $\zeta \in (0, 1)$, mientras que $\widehat{W}_+(0) = \widehat{W}_-(0) = 1$ y $\widehat{W}_+(1) = \widehat{W}_-(1) = 0$. Probaremos que esto es imposible.

Sean ζ_+ y ζ_- con $0 < \zeta_- < \zeta_+$ puntos tales que $\widehat{W}_-(\zeta_-) = \widehat{W}_+(\zeta_+)$. Se tiene entonces que $\widehat{W}'_-(\zeta_-) > \widehat{W}'_+(\zeta_+)$. En efecto, si no fuera cierto tendríamos que

$$\widehat{W}'_+(\bar{\zeta}) \left(\frac{\widehat{W}'_+(\bar{\zeta})}{|\kappa_+|} + \frac{\bar{\zeta}}{|\gamma_+|} \right) < \widehat{W}'_-(\bar{\zeta}) \left(\frac{\widehat{W}'_-(\bar{\zeta})}{|\kappa_-|} + \frac{\bar{\zeta}}{|\gamma_-|} \right),$$

en contradicción con el hecho de que ambas funciones son solución, cada una para los valores de γ y κ correspondientes, de (2.8).

Lo que acabamos de ver es que $\zeta'_- < \zeta'_+$, donde ζ_- y ζ_+ son las funciones inversas de \widehat{W}_- y \widehat{W}_+ respectivamente. Así pues, $J(\widehat{W}) = \zeta_+ - \zeta_-$ es monótona creciente. Dado que $J(1/2) = \delta > 0$, se tiene que $J(1) \geq \delta > 0$, contradiciendo la igualdad $J(1) = 0$. \square

El siguiente teorema prueba la existencia de soluciones para cualquier valor del exponente $\gamma < 0$.

Teorema 2.5. Dado $\gamma < 0$ existe un único valor de κ , que verifica que $-\pi^2 < \kappa < 0$, tal que el problema (2) tiene solución clásica.

Prueba. (a) $-\pi^2 < \kappa < 0$. El que κ sea menor que cero es una consecuencia de que $W(0) = \gamma/\kappa > 0$. En cuanto a la otra desigualdad, teniendo en cuenta que $W' \leq 0$, tenemos que

$$(2.9) \quad (W')^2 + W(\gamma - \kappa W) \geq 0.$$

Por tanto, utilizando que $\kappa W - \gamma \geq 0$ (lo que es consecuencia de la monotonía de W), obtenemos que

$$(2.10) \quad -W' \geq W^{1/2}(\kappa W - \gamma)^{1/2}.$$

Como $W' \neq 0$ en $(0, 1)$, las desigualdades (2.9) y (2.10) son estrictas para algún subintervalo de $(0, 1)$. De esta forma, integrando (2.10) en $(0, 1)$ se llega finalmente a

$$\frac{\pi}{\sqrt{|\kappa|}} > 1.$$

(b) *Existencia.* Sean $\gamma < 0$ y $\kappa < 0$ fijos. Consideramos el problema de valor inicial

$$(2.11) \quad \begin{cases} W' = -\frac{1}{2} \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4W(|\kappa|W - |\gamma|)} \right) \equiv f(\zeta, W), \\ W(0) = \frac{|\gamma|}{|\kappa|}. \end{cases}$$

Dado que f es continua, sabemos que existe una solución local (no necesariamente única) en un entorno de $\zeta = 0$. Esta solución se puede extender por la derecha mientras que W no tenga una asíntota vertical. Veamos que necesariamente existe un punto ζ (y obviamente sólo uno) tal que $W(\zeta) = 0$. Si W tiene una asíntota vertical, entonces $W \rightarrow -\infty$ cuando nos acercamos a la asíntota, por ser $W' \leq 0$, lo que produce inmediatamente el resultado. Si W no tiene asíntota, entonces se puede extender a todo $\zeta \geq 0$. Ahora bien, $W' \leq -\zeta/2$. Integrando en $(0, \zeta)$ obtenemos que

$$W(\zeta) \leq \frac{|\gamma|}{|\kappa|} - \frac{\zeta^2}{4}.$$

Haciendo $\zeta \rightarrow \infty$ obtenemos que W acaba por hacerse negativa.

Así pues, existe $\zeta = \bar{\zeta}$ tal que $W(\zeta) > 0$ para todo $\zeta \in [0, \bar{\zeta})$ y $W(\bar{\zeta}) = 0$. Por otra parte, dado que $W' \leq 0$, tenemos que $|\kappa|W - |\gamma| \leq 0$. El valor absoluto que aparece dentro de la raíz en (2.11) no desempeña, por tanto, ningún papel, y W resulta ser solución de la ecuación (2) en $(0, \bar{\zeta})$. Sea

$$\widetilde{W}(\zeta) = \frac{1}{\bar{\zeta}^2} W(\bar{\zeta}\zeta).$$

Entonces \widetilde{W} es solución del problema (2) para γ y $\kappa\bar{\zeta}^2$.

(c) *Unicidad.* Es consecuencia de la monotonía estricta de $\gamma(\kappa)$. \square

Podemos juntar esta información con la obtenida en la sección anterior para obtener el siguiente teorema.

Teorema 2.6. (i) Dado $\kappa > -\pi^2$, existe un único valor de γ , $\gamma = \gamma(\kappa)$, tal que el problema (2) tiene solución clásica. Dicha solución es única.

(ii) Dado $\gamma \in \mathbb{R}$, existe un único valor de κ , $\kappa = \kappa(\gamma)$, tal que el problema (2) tiene solución clásica. Dicha solución es única y $\kappa(\gamma) > -\pi^2$.

(iii) Las funciones $\gamma(\kappa)$ y $\kappa(\gamma)$ son continuas y estrictamente monótonas crecientes.

Prueba. El único punto que aún no ha sido probado es la continuidad de las funciones. Es consecuencia inmediata de que $\gamma(\kappa)$ está definida en $(-\pi^2, \infty)$, $\kappa(\gamma)$ está definida en \mathbb{R} y de la monotonía de ambas funciones. \square

En la figura 1 representamos γ frente a κ para distintos valores de m . Como vemos, el comportamiento para $m > 1$ es cualitativamente igual que para $m = 1$. Así mismo, podemos apreciar que la convergencia al caso $m = 1$ cuando $m \downarrow 1$ no se restringe al caso $\kappa \geq 0$, siendo también válida para $-\pi^2 \leq \kappa < 0$.

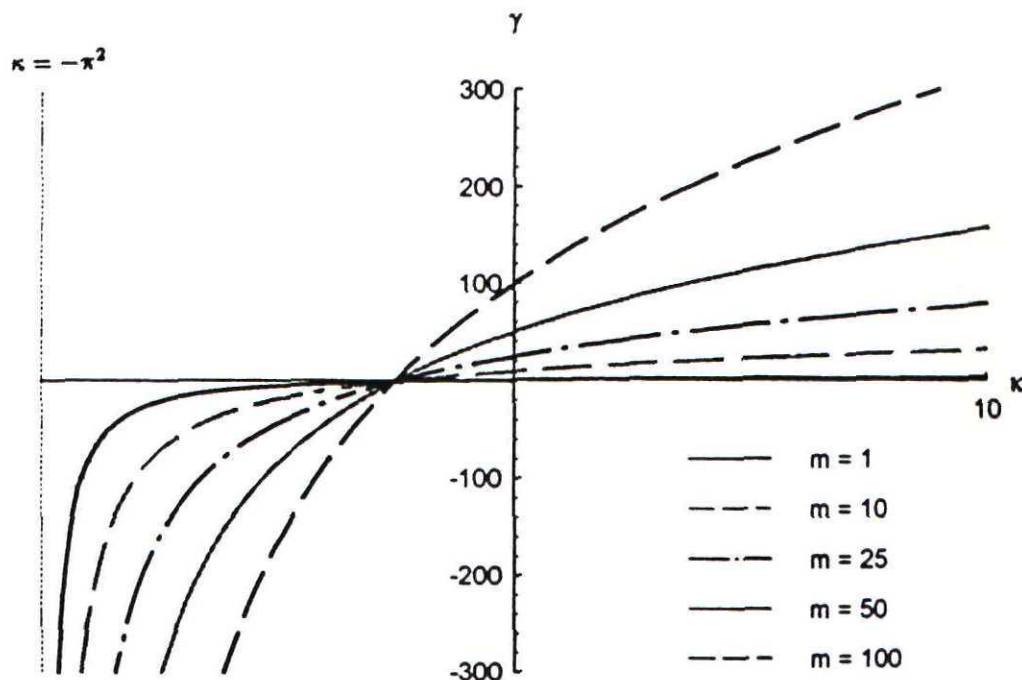


FIGURA 1. γ frente a κ para distintos valores de m .

3. $\kappa \leq -\pi^2$. Soluciones con $\gamma = -\infty$.

Hemos finalizado la sección anterior viendo que hay soluciones clásicas de (2) para todo $\kappa > -\pi^2$. También hemos visto que, dado $\gamma \in \mathbb{R}$, hay un único valor de κ tal que hay solución clásica de (2). Pero dicho valor de κ verifica que $\kappa > -\pi^2$. No hay por

tanto soluciones clásicas de (2) para $\kappa \leq -\pi^2$ correspondientes a valores de γ finitos. Sin embargo, como veremos a continuación, sí hay soluciones para $\gamma = -\infty$. Para verlas hacemos el cambio de escala $\widehat{W} = W/|\gamma|$ e introducimos el parámetro $\sigma = 1/|\gamma|$. Así, $\gamma = -\infty$ corresponde a $\sigma = 0$, y la correspondiente solución cambiada de escala, si es que existe, satisface

$$(3.1) \quad \begin{cases} (\widehat{W}')^2 + \widehat{W}(-\kappa\widehat{W} - 1) = 0 & \text{si } 0 < \zeta < 1, \\ \widehat{W}(\zeta) > 0 & \text{si } 0 \leq \zeta < 1, \\ \widehat{W}'(0) = 0, \widehat{W}(1) = 0 \text{ y } \widehat{W}'(1) = 0. \end{cases}$$

Lo primero que observamos es que $\widehat{W}(0) = -1/\kappa$. Por tanto, sólo puede haber soluciones de (3.1) si $\kappa < 0$. Nos restringiremos a dicho rango de valores. El problema (3.1) se puede integrar explícitamente de forma relativamente sencilla. Sólo tiene solución si $\kappa \leq -\pi^2$, y en ese rango de valores de κ dicha solución viene dada por

$$(3.2) \quad \widehat{W} = \begin{cases} \frac{1}{|\kappa|} & 0 \leq \zeta \leq \bar{\zeta}, \\ \frac{1}{|\kappa|} \cos^2 \left(\frac{\sqrt{|\kappa|}}{2} (\zeta - \bar{\zeta}) \right) & \bar{\zeta} \leq \zeta \leq 1, \end{cases}$$

donde $(1 - \bar{\zeta}) = \pi/\sqrt{|\kappa|}$. Nótese que $|\kappa| \geq \pi^2$ implica que $0 \leq \bar{\zeta} < 1$. Cuanto mayor sea $|\kappa|$, mayor será $\bar{\zeta}$, es decir, a mayor reacción, mayor es la región plana y menor es la capa límite. Obsérvese también que estas soluciones son tan sólo C^1 .

Para $|\kappa| = \pi^2$ también existe una solución de este tipo para $m > 1$. Dicha solución viene dada por

$$\widehat{W}(\zeta; m, -\pi^2) = \frac{2}{(m+1)\pi^2} \cos^2 \left(\frac{\pi\zeta}{2} \right).$$

El límite cuando $m \downarrow 1$ de esta solución es precisamente (3.2) con $|\kappa| = \pi^2$.

4. Soluciones autosemejantes del problema con $m = 1$.

La variable presión $v = mu^{m-1}/(m-1)$ satisface la ecuación

$$v_t = l(t)(m-1)vv_{xx} + l(t)v_x^2 - \frac{\kappa v^2}{l(t)}.$$

Si hacemos $m = 1$, obtenemos

$$(4.1) \quad v_t = l(t)v_x^2 - \frac{\kappa v^2}{l(t)}.$$

Para finalizar el capítulo estudiaremos la conexión existente entre las soluciones de (2) y los diferentes tipos de soluciones autosemejantes de soporte compacto que presenta la ecuación (4.1).

Igual que en el caso $m > 1$, consideramos soluciones autosemejantes de tres tipos:

- (T1) Crecimiento o decaimiento potencial: $v(x, t) = t^{-\mu}w(\zeta)$, con $\zeta = xt^{\mu-1}$, $\mu < 1$.
- (T2) Explosión en tiempo finito: $v(x, t) = (T - t)^{-\mu}w(\zeta)$, con $\zeta = x(T - t)^{\mu-1}$, $\mu > 1$.
- (T3) Crecimiento exponencial: $e^{\lambda t}w(\zeta)$, con $\zeta = xe^{-\lambda t}$.

Para cada uno de estos tipos de solución definimos una función presión normalizada de la siguiente forma:

- (T1) $W = w/(1 - \mu)$;
- (T2) $W = w/(\mu - 1)$;
- (T3) $W = w/\lambda$.

Esta función presión, W , es en los tres casos una función par solución del mismo problema:

$$(4.2) \quad \begin{cases} W'^2 + W'\zeta + W(\gamma - \kappa W) = 0 & \text{para } |\zeta| < 1, \\ W > 0 & \text{para } |\zeta| < 1, \\ W(\pm 1) = 0, \end{cases}$$

con $\gamma = \mu/(1 - \mu) > -1$ en el primer caso, $\gamma < -1$ en el segundo y $\gamma = -1$ en el caso exponencial. Como en el caso $m > 1$, nos hemos restringido sin pérdida de generalidad al caso en que $l_0 = 1$. Dado que estamos ante una ecuación de primer orden, v no tiene por qué ser regular en el conjunto de positividad y, por tanto, W no es, en principio, solución clásica de (4.2). La presión W es tan sólo una función continua que verifica la ecuación en casi todo punto. Si W fuera además de clase C^1 en $[0, 1]$, es decir, si fuera una solución clásica de (4.2), entonces necesariamente $W'(0) = 0$ y $W'(1) = -1$, y W sería una solución de (2). Así pues, lo que hemos demostrado en las secciones anteriores es que para cada valor de $\kappa > -\pi^2$ hay una única solución autosemejante de uno de los tres tipos mencionados, regular en el conjunto de positividad. No hemos excluido por tanto la posibilidad de que haya otras soluciones autosemejantes menos regulares.

En cuanto a las soluciones con $\gamma = -\infty$, observamos que el perfil w correspondiente a soluciones con explosión en tiempo finito y regulares en el conjunto de positividad satisface

$$\begin{cases} (w')^2 + (\mu - 1)\zeta w' + w(-\kappa w - \mu) = 0 & \text{si } 0 < \zeta < 1, \\ w(\zeta) > 0 & \text{si } 0 \leq \zeta < 1, \\ w'(0) = 0, w(1) = 0 \text{ y } w'(1) = 0. \end{cases}$$

Si $\mu = 1$, entonces w es solución del problema (3.1). Así, podemos reinterpretar las soluciones de (3.1) para $\kappa \leq -\pi^2$ obtenidas en la sección 3 como soluciones autosemejantes con soporte fijo que explotan en tiempo finito que además son regulares en el conjunto de positividad.

REFERENCIAS

- [AB] D.G. Aronson y Ph. Bénilan, *Régularité des solutions de l'équation des milieux poreux dans \mathbb{R}^n* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **288** (1979), 103–105.
- [ACK] D.G. Aronson, L.A. Caffarelli y S. Kamin, *How an initially stationary interface begins to move in a porous medium flow*, SIAM J. Math. Anal. **14** (1983), 639–658.
- [AG] D.G. Aronson y J. Graveleau, *A selfsimilar solution to the focusing problem for the porous medium equation*, Euro. Jnl. Appl. Math. **4** (1992), 65–81.
- [AV1] D.G. Aronson y J.L. Vázquez, *The porous medium equation as a finite-speed approximation to a Hamilton-Jacobi equation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **4** (1987), no. 3, 203–230.
- [AV2] ———, *Anomalous exponents in nonlinear diffusion*, J. Nonlinear Sci. **5** (1995), 29–56.
- [AV3] ———, *Calculation of anomalous exponents in nonlinear diffusion*, Phys. Rev. Lett. **72** (1994), 348–351.
- [AP] F.V. Atkinson y L.A. Peletier, *Similarity profiles of flows through porous media*, Arch. Rational Mech. Anal. **42** (1971), 369–379.
- [B1] G.I. Barenblatt, *Self-similar turbulence propagation from an instantaneous plane source*, en “Nonlinear dynamics and turbulence” (G.I. Barenblatt, G. Iooss y D.D. Joseph, eds.), Pitman, Boston, 1983, pp. 48–60.
- [B2] ———, “Similarity, selfsimilarity and intermediate asymptotics”, Consultants Bureau, Nueva York, 1978; existe una segunda edición revisada en ruso, Leningrad Gidrometeoizdat, 1982.
- [BdPK1] M. Bertsch, R. dal Passo y R. Kersner, *The evolution of turbulente bursts: the $b - \epsilon$ model*, Euro. Jnl. Appl. Math. **5** (1994), 537–557.
- [BdPK2] ———, *Parameter dependence in the $b - \epsilon$ model*, Differential Integral Equations **7** (1994), no. 5, 1195–1214.
- [BGL] G.I. Barenblatt, N.L. Galerkina y M.V. Luneva, *Evolution of a turbulence burst*, Inzh.-Fiz. Zh. **53** (1987), 733–740 (en ruso).
- [BPT] H. Brezis, L.A. Peletier y D. Terman, *A very singular solution of the heat equation with absorption*, Arch. Rational Mech. Anal. **95** (1986), 185–209.
- [CG] L.Y. Chen y N. Goldenfeld, *Renormalisation group theory for the propagation of turbulent bursts*, Phys. Rev. A **45** (1992), 5572.
- [CL] E.A. Coddington y N. Levinson, “Theory of ordinary differential equations”, Mc Graw-Hill, 1955.
- [F] A. Friedman, “Partial differential equations of parabolic type”, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.

- [G] V.A. Galaktionov, *Proof of the localization of unbounded solutions of the nonlinear parabolic equation $u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^\beta$* , *Differentsial'nye Uravneniya* **21**, 1 (1985), 15–23 (en ruso); traducción al inglés, *Differential Equations* **21** (1985), 11–18.
- [Gi] B.H. Gilding, *Hölder continuity of solutions of parabolic equations*, *J. London Math. Soc.* **13** (1976), 103–106.
- [HP] S.P. Hastings y L.A. Peletier, *On a self-similar solution for the decay of turbulent bursts*, *Euro. Jnl. Appl. Math.* **3** (1992), 319–341.
- [HV] M.A. Herrero y J.L. Vázquez, *The one-dimensional nonlinear heat equation with absorption: regularity of solutions and interfaces*, *SIAM J. Math. Anal.* **18** (1987), no. 1, 149–167.
- [K] A.S. Kalashnikov, *The propagation of disturbances in problems of nonlinear heat conduction with absorption*, *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.* **14** (1974), no. 4, 891–905.
- [Ke] R. Kersner, *Degenerate parabolic equations with general nonlinearities*, *Nonlinear Analysis TMA* **4** (1980), no. 6, 1043–1062.
- [Kn] B.F. Knerr, *The behaviour of the support of solutions of the equation of nonlinear heat conduction with absorption in one dimension*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **249** (1979), no. 2, 409–424.
- [KPV] S. Kamin, L.A. Peletier y J.L. Vázquez, *On the Barenblatt equation of elastoplastic filtration*, *Indiana Univ. Math. Jour.* **40** (1991), 1333–1362.
- [KV] S. Kamin y J.L. Vázquez, *The propagation of turbulent bursts*, *Euro. Jnl. Appl. Math.* **3** (1992), 263–272.
- [L] P.L. Lions, “Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations”, *Research Notes in Math.*, 69, Pitman, Boston, 1982.
- [LSU] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov y N.N. Ural'ceva, “Linear and quasilinear equations of parabolic type”, *Transl. Math. Monographs* **23** (1968), AMS, Providence.
- [PV] A. de Pablo y J.L. Vázquez, *The balance between strong reaction and slow diffusion*, *Comm. Partial Differential Equations* **15**(2) (1990), 159–183.
- [PT] L.A. Peletier y D. Terman, *A very singular solution of the porous media equation with absorption*, *J. Differential Equations* **65** (1986), 396–410.
- [QV1] F. Quirós y J.L. Vázquez, *Self-similar turbulent bursts. Existence and analytic dependence*, *Differential Integral Equations* **8** (1995), no. 7, 1677–1708.
- [QV2] ———, *Different similarity regimes for the turbulent burst equation*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **320** (1995), 559–565.
- [SGKM] A.A. Samarskii, V.A. Galaktionov, S.P. Kurdyumov y A.P. Mikhailov, “Blow-up in problems for quasilinear parabolic equations”, *Nauka, Moscú* (en ruso); traducción al inglés, *Walter de Gruyter, Berlín*, 1995.
- [SZKM] A.A. Samarskii, N.V. Zmitrenko, S.P. Kurdyumov y A.P. Mikhailov, *Thermal structures and fundamental length in a medium with nonlinear heat conduction and volumetric heat sources*, *Dokl. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math. Phys.* **227**, 2, 321–324 (en ruso); traducción al inglés, *Soviet Phys. Dokl.* **21** (1976), 141–143.
- [V] J.L. Vázquez, *The interface of one-dimensional flows in porous media*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **285** (1984), 717–737.

PARTE B

Comportamiento asintótico similar de dos problemas de frontera libre

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN: EL PROBLEMA DE STEFAN Y EL PROBLEMA DE HELE-SHAW

1. Introducción

Un problema de Stefan es un modelo matemático para describir la fusión de un trozo de hielo en contacto con agua. En los llamados problemas de Stefan a una fase la temperatura del hielo se supone mantenida a 0°C . Por tanto, las incógnitas son la distribución de temperatura en el agua y la forma de la interfase (o frontera libre) entre el agua y el hielo (ver las monografías de Rubinstein [Ru] y Meirmanov [Me]).

El problema de Hele-Shaw es un modelo que describe el movimiento de un fluido viscoso contenido entre dos placas paralelas próximas entre sí [ST], [EJ]. Tiene aplicaciones en la industria del plástico (moldeado por inyección [R]), y en electromecanizado de piezas metálicas [MGR]. También se puede considerar como el límite de calor específico cero del problema de Stefan [LR], siendo en ese sentido una versión simplificada de tan famoso problema.

El propósito de esta parte de la memoria es estudiar el comportamiento asintótico para tiempos grandes de la solución del problema de valores iniciales y de frontera en un dominio exterior Ω para ambos modelos, y mostrar la relación existente entre ambos. Prescribimos datos de frontera de tipo Dirichlet $g(x)$ sobre el conjunto compacto $\partial\Omega$, no negativos, no triviales ($g \not\equiv 0$) y constantes en el tiempo. Para el problema de Stefan tenemos que especificar también el dato inicial

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x),$$

que supondremos no negativo y con soporte compacto en Ω . Para el problema de Hele-Shaw sólo necesitamos especificar el soporte inicial, que es acotado.

Veremos que hay una notable diferencia en el comportamiento asintótico para tiempos grandes entre los casos de una y varias dimensiones. Así, es bien sabido que, aunque en una dimensión espacial hay convergencia a un estado estacionario en la escala $x/t^{1/2}$ para ambos problemas, el perfil asintótico no es el mismo en los dos casos. Probaremos que, por el contrario, si la dimensión espacial es mayor o igual que dos, el problema de Stefan *se simplifica* en el problema de Hele-Shaw. Describamos los resultados con algo más de detalle:

PROBLEMA DE HELE-SHAW UNIDIMENSIONAL. Consiste en encontrar $p(x, t)$ y $r(t)$ tales que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 & 0 < x < r(t), t > 0, \\ p(r(t), t) = 0 & t \geq 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x}(r(t), t) = -Lr'(t) & t > 0, \\ p(0, t) = A & t \geq 0, \\ r(0) = b. \end{cases}$$

En este caso el problema se puede resolver explícitamente y la solución es

$$p(x, t) = A \left[1 - \frac{x}{\sqrt{b^2 + \frac{2A}{L}t}} \right]_+.$$

Se ve inmediatamente que el comportamiento asintótico viene dado por la solución autosemejante

$$(1.1) \quad p(x, t) = A \left[1 - \frac{\zeta}{\sqrt{2A/L}} \right]_+, \quad \zeta = x/\sqrt{t},$$

con frontera libre

$$r(t) = (2A/L)^{1/2} t^{1/2}.$$

PROBLEMA DE STEFAN UNIDIMENSIONAL. Consiste en encontrar $\theta(x, t)$ y $r(t)$ tales que

$$\begin{cases} c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} & 0 < x < r(t), t > 0, \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & 0 \leq x \leq b, \\ \theta(r(t), t) = 0 & t \geq 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(r(t), t) = -Lr'(t) & t > 0, \\ \theta(0, t) = A & t \geq 0, \\ r(0) = b. \end{cases}$$

La constante c representa el calor específico. Es bien sabido que en este caso el comportamiento asintótico de la solución viene dado por una solución autosemejante de la forma

$$(1.2) \quad \theta(x, t) = A \left[1 - \frac{E(c^{1/2}\zeta)}{E(\eta_0)} \right]_+, \quad \zeta = x/\sqrt{t},$$

donde $E(\cdot)$ es la función error y η_0 es la única solución de la ecuación

$$\mathcal{F}(\eta_0) \equiv \frac{\sqrt{\pi}}{2} \eta_0 e^{\eta_0^2/4} E(\eta_0) = \frac{Ac}{L}.$$

La frontera libre de la solución autosemejante (1.2) está dada por

$$r(t) = \frac{\eta_0}{\sqrt{c}} t^{1/2}.$$

Aunque ambas funciones, p y θ , se estabilizan a A cuando $t \rightarrow \infty$ para x fijo, los perfiles que dan el comportamiento asintótico intermedio son diferentes. Es más, aunque la tasa de crecimiento de la frontera libre es en ambos casos $t^{1/2}$, las constantes no son las mismas. A pesar de todo, ambos problemas están estrechamente relacionados. En efecto, se sabe que las soluciones del problema de Stefan convergen a soluciones del problema de Hele-Shaw cuando $c \rightarrow 0$. De hecho, es fácil comprobar que $\mathcal{F}^{-1}(S) \sim \sqrt{2S}$ cuando $S \rightarrow 0$. Por tanto, $\zeta_0 = \eta_0/\sqrt{c} \rightarrow (2A/L)^{1/2}$ cuando $c \rightarrow 0$. Además, el perfil para el problema de Stefan dado en (1.2) converge al perfil para el problema de Hele-Shaw que aparece en (1.1).

La situación es diferente para $n > 1$. No hay ninguna solución autosemejante que proporcione simultáneamente el comportamiento para tiempos grandes de las soluciones e interfases de nuestros problemas. Dicho comportamiento se puede describir utilizando las ideas de *conexión de desarrollos asintóticos* (en inglés, *matching asymptotic expansions*). Es fácil probar que el conjunto de positividad se expande cubriendo todo el dominio exterior Ω , y que en las coordenadas (x, t) habituales las soluciones de ambos problemas convergen a la solución del problema de Dirichlet exterior para el laplaciano. Éste es el que llamamos *límite interior* o *regular*. Por otra parte, probamos que, después de un cambio de escala de la forma

$$\begin{aligned} y &= x/t^{1/n}, & v &= ut^{(n-2)/n} & \text{si } n \geq 3, \\ y &= x/\mathcal{R}(t), & v &= u \log \mathcal{R}(t) & \text{si } n = 2, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{R}(t) \sim C(t/\log t)^{1/2}$ cuando $t \rightarrow \infty$, y u es p o θ según consideremos el problema de Hele-Shaw o el de Stefan, tenemos convergencia en ambos casos al mismo problema de frontera libre, que corresponde a una solución radial, singular y autosemejante del problema de Hele-Shaw. Esto quiere decir que en la región lejana o exterior, cerca de la frontera libre, Hele-Shaw representa el *problema reducido* para Stefan (en el sentido de la teoría de capas límite de Prandtl). En la práctica, la ecuación del calor del problema de Stefan pierde el término inercial θ_t cuando $t \rightarrow \infty$ porque este término pasa a ser asintóticamente de menor orden con respecto a los términos principales. Estamos, por tanto, ante un caso de *simplificación asintótica*, un fenómeno bastante frecuente en ecuaciones parabólicas no lineales (ver [V]). El análisis proporciona, en particular, la posición de la frontera libre, cuyo comportamiento viene dado por

$$\begin{aligned} |x| &\sim Ct^{1/n} & \text{si } n \geq 3, \\ |x| &\sim C(t/\log t)^{1/2} & \text{si } n = 2. \end{aligned}$$

La *conexión* entre ambas regiones proporciona la constante C en la región singular.

Existe un estudio anterior sobre el comportamiento asintótico para el problema de Stefan en el caso $n \geq 3$ debido a Matano [M]. Allí se prueba que cualquier solución débil acaba

haciéndose clásica, es decir, la interfase entre el hielo y el agua es suficientemente regular para todo t grande. También se prueba que la forma de la frontera libre (es decir, la interfase) tiende a una esfera de radio $(Ct)^{1/n}$ cuando $t \rightarrow \infty$ y se calcula la constante. Nuestro estudio permite establecer además los desarrollos asintóticos para todo $n \geq 2$. También probamos que la forma de la frontera libre del problema de Hele-Shaw se aproxima a una esfera que tiene exactamente el mismo radio.

Concluimos que hay una fuerte diferencia entre los casos unidimensional y multidimensional: para $n = 1$ las soluciones del problema de Stefan no acaban haciéndose soluciones del problema de Hele-Shaw, mientras que para $n \geq 2$ sí lo hacen. Hay una solución autosemejante explícita que da el comportamiento asintótico de Stefan cuando $n = 1$ que *no* es una solución de Hele-Shaw. Para $n \geq 2$ necesitamos dos desarrollos asintóticos *conectados* para explicar el comportamiento asintótico de las soluciones en ambos problemas. Por cierto, el desarrollo exterior es siempre autosemejante. La influencia del dato inicial de soporte compacto desaparece (hasta primer orden) en todos los casos.

2. Preliminares

Introducimos algo de notación con el fin de enunciar los resultados anteriores de una forma más precisa.

Supondremos dado un dominio acotado $G_0 \subset \mathbb{R}^n$ cuya frontera consiste de dos hipersuperficies conexas suaves Γ y Γ_0 , donde Γ está dentro de Γ_0 y acota un dominio simplemente conexo G ; es decir, $\partial G = \Gamma$. Supondremos que $0 \in G$.

FORMULACIÓN CLÁSICA DEL PROBLEMA DE HELE-SHAW. Consiste en encontrar funciones $s(x) \geq 0$ y $p(x, t) \geq 0$, definidas para $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n \setminus G$, que satisfagan

$$(HS) \quad \begin{cases} \Delta p = 0 & \text{en } \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}, t > s(x)\}, \\ p = 0 & \text{si } t = s(x), x \in \mathbb{R}^n \setminus G_0, \\ \nabla p \cdot \nabla s = -L & \text{si } t = s(x), x \in \mathbb{R}^n \setminus G_0, \\ p(x, t) = g(x) & x \in \Gamma, t > 0, \\ s(x) = 0 & \text{si } x \in G_0, \end{cases}$$

donde $L > 0$ es una constante y g es una función no negativa, no trivial y continua sobre la hipersuperficie Γ .

Cuando este problema se utiliza como modelo para describir el movimiento de un fluido entre dos placas paralelas, la función p se interpreta como la presión en el fluido, la hipersuperficie $t = s(x)$ es la interfase entre el fluido y el aire, y la presión del aire se considera idénticamente nula. En tiempo t el material ocupa el subconjunto $\Omega(t)$ de $\mathbb{R}^n \setminus G$ definido por $\Omega(t) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \setminus G : s(x) < t\}$.

FORMULACIÓN CLÁSICA DEL PROBLEMA DE STEFAN. Resolver este problema consiste en encontrar funciones $s(x) \geq 0$ y $\theta(x, t) \geq 0$, definidas para $t \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}^n \setminus G$, que satisfagan

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta \theta & \text{en } \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}, t > s(x)\}, \\ \theta = 0 & \text{si } t = s(x), x \in \mathbb{R}^n \setminus G_0, \\ \nabla \theta \cdot \nabla s = -L & \text{si } t = s(x), x \in \mathbb{R}^n \setminus G_0, \\ \theta(x, 0) = h(x) & x \in G_0, \\ \theta(x, t) = g(x) & x \in \Gamma, t > 0, \\ s(x) = 0, & \text{si } x \in G_0, \end{cases}$$

donde $L > 0$ es una constante (el calor latente), y g y h son funciones dadas que satisfacen:

- (i) g es no negativa, no trivial y continua en Γ ;
- (ii) h es continua en $\mathbb{R}^n \setminus G$, $h(x) > 0$ si $x \in G_0$, $h(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^n \setminus (G_0 \cup \overline{G})$;
- (iii) $h = g$ en Γ .

La función θ se interpreta como la temperatura del agua, la hipersuperficie $t = s(x)$ es la interfase entre el agua y el hielo, y la temperatura del hielo se considera idénticamente igual a 0. En tiempo t el agua ocupa el subconjunto $\Omega(t)$ de $\mathbb{R}^n \setminus G$ definido mediante $\Omega(t) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \setminus G : s(x) < t\}$.

Observación. En ambos problemas es posible tomar datos de frontera $g(x, t)$ dependientes del tiempo. Sin embargo, estudiamos el comportamiento asintótico tan sólo para datos constantes en el tiempo.

Los problemas de Hele-Shaw y Stefan no tienen necesariamente una solución clásica global en el caso de espacios multidimensionales — una vez más en contraste con el caso unidimensional —, ya que a veces aparecen singularidades de tipo cúspide en la frontera libre. Sin embargo, siempre tienen una solución débil que existe para todo tiempo.

FORMULACIÓN DÉBIL DEL PROBLEMA DE HELE-SHAW. Elliot y Janovský [EJ] introdujeron en el problema de Hele-Shaw la transformada de Baiocchi $u(x, t)$, definida en $(\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}) \times \mathbb{R}^+$ como

$$u(x, t) = \begin{cases} \int_{s(x)}^t p(x, \tau) d\tau & \text{si } x \in \Omega(t), \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Para todo $t > 0$ la función $u(\cdot, t)$ satisface

$$\begin{cases} \Delta u = L & \text{en } \Omega(t) \setminus G_0, \\ \Delta u = 0 & \text{en } G_0 \cup (\mathbb{R}^n \setminus \Omega(t)). \end{cases}$$

Además, verifica las condiciones de frontera

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ en } \Gamma(t) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \setminus G_0, t = s(x)\}.$$

Esta variable satisface una versión integrada de la condición en la frontera fija,

$$u(x, t) = \int_0^t g(x, \tau) d\tau \quad \text{en } \Gamma.$$

Por tanto, u es una solución del problema elíptico no lineal

$$(HSD) \quad \begin{cases} \Delta u = \chi(x)H(u) & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}, \\ u(x, t) = \int_0^t g(x, \tau) d\tau & \text{si } x \in \Gamma. \end{cases}$$

Aquí $\chi(x)$ vale 0 en G_0 y L en el resto; $H(u) = 0$ para $u \leq 0$ y $H(u) = 1$ para $u > 0$. Alternativamente, u se puede ver como la solución de una desigualdad variacional, puesto que

$$u \geq 0, \quad \chi(x) - \Delta u \geq 0 \quad \text{y} \quad (\chi(x) - \Delta u)u = 0.$$

Usando esta formulación Elliot y Janovský probaron que existe una única solución de (HSD). Dada una solución u definimos

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \{x \in \mathbb{R}^n \setminus G : u(x, t) > 0\}, \\ \Gamma(t) &= \partial\Omega(t) \setminus \partial G, \\ p(x, t) &= \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) & \text{si } x \in \Omega(t), \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus G, \quad x \notin \Omega(t). \end{cases} \end{aligned}$$

Al par $(p, \Gamma(t))$ se le conoce como la *solución débil del problema de Hele-Shaw* (HSD).

Usaremos el siguiente resultado de comparación de [KLV]:

Proposición 2.1. *Supongamos que $\chi \geq \hat{\chi}$ y $g \leq \hat{g}$. Sean u y \hat{u} las soluciones al problema (HSD) para χ , g y $\hat{\chi}$, \hat{g} respectivamente. Entonces*

$$u \leq \hat{u}.$$

Observación. Bajo las mismas condiciones se prueba fácilmente, por el mismo método que fue sugerido para el problema de Stefan por Friedman y Kinderlehrer (ver la observación que sigue al lema 2.5 en [FK]), que

$$p \equiv \frac{\partial u}{\partial t} \leq \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \equiv \hat{p}.$$

FORMULACIÓN DÉBIL DEL PROBLEMA DE STEFAN. En esta formulación, debida a Duvaut [D], $\theta(x, t)$ viene dada en la forma $\theta = u_t$, siendo u la solución de una cierta desigualdad variacional. Dicho de forma más precisa, definimos $u(x, t)$ por

$$u(x, t) = \begin{cases} \int_{s(x)}^t \theta(x, \tau) d\tau & \text{si } x \in \Omega(t), \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

La función u satisface

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -L & x \in \mathbb{R}^n \setminus (G_0 \cup \overline{G}), s(x) < t, \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = h(x) & x \in G_0, s(x) < t. \end{cases}$$

Además, satisface las condiciones de frontera

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ si } t = s(x), x \in \mathbb{R}^n \setminus G_0.$$

Esta variable también satisface una versión integrada de la condición impuesta en la frontera fija,

$$u(x, t) = \int_0^t g(x, \tau) d\tau \quad \text{en } \Gamma.$$

Por consiguiente, u es solución del problema parabólico no lineal

$$(SD) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x)H(u) & \text{en } (\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}) \times [0, \infty), \\ u(x, t) = \int_0^t g(x, \tau) d\tau & \text{si } x \in \Gamma, \end{cases}$$

donde

$$f = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in G_0, \\ -L & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus G_0. \end{cases}$$

Alternativamente, u se puede ver como la solución de una desigualdad variacional, puesto que

$$u \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f \geq 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f \right) u = 0,$$

Usando esta formulación Friedman y Kinderlehrer [FK] probaron que existe una única solución de (SD). Dada una solución u , definimos

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \{x \in \mathbb{R}^n \setminus G : u(x, t) > 0\}, \\ \Gamma(t) &= \partial\Omega(t) \setminus \partial G, \\ \theta(x, t) &= \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) & \text{si } x \in \Omega(t), \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus G, x \notin \Omega(t). \end{cases} \end{aligned}$$

Al par $(\theta, \Gamma(t))$ se le conoce como la *solución débil al problema de Stefan* (SD).

Usaremos el siguiente resultado de comparación de [FK]:

Proposición 2.2. Supongamos que $f \leq \hat{f}$ y $g \leq \hat{g}$. Sean u y \hat{u} las soluciones al problema (SD) para f, g y \hat{f}, \hat{g} respectivamente. Entonces

$$u \leq \hat{u}.$$

Además,

$$\theta \equiv \frac{\partial u}{\partial t} \leq \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \equiv \hat{\theta}.$$

Caffarelli y Friedman [CF] han probado que θ es continua en $(\mathbb{R}^n \setminus G) \times [0, \infty)$. No es difícil ver que θ es regular en el interior de la región ocupada por el agua, ya que satisface allí la ecuación del calor en el sentido de distribuciones. El que θ sea más regular cerca de la frontera libre $\Gamma(t)$ depende de la regularidad de $\Gamma(t)$. En otras palabras, una solución débil es clásica si $\Gamma(t)$ no tiene puntos singulares. En efecto, cualquier punto singular en la frontera libre tiene que ser una singularidad de tipo cúspide [C], y la solución es C^∞ dentro de la región ocupada por el agua hasta la frontera libre siempre y cuando dicha frontera libre forme localmente una hipersuperficie C^1 [KN]. También se sabe que la frontera libre es C^∞ si es C^1 o incluso simplemente Lipschitz [KN], [C]. Para enunciar estos resultados con más precisión recordamos la noción de densidad de Lebesgue.

Definición 2.3. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y sea x_0 cualquier punto de \mathbb{R}^n . Decimos que x_0 tiene densidad de Lebesgue positiva con respecto a A si

$$\liminf_{\rho \downarrow 0} \frac{\mu(A \cap B_\rho(x_0))}{\mu(B_\rho(x_0))} > 0,$$

donde μ es la medida de Lebesgue y $B_\rho(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \rho\}$.

Combinando el criterio de regularidad C^∞ de Kinderlehrer y Nirenberg [KN] y el criterio de regularidad C^1 de Caffarelli [C], obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.4. Sea t_0 un número positivo cualquiera, y sea x_0 cualquier punto de $\Gamma(t_0)$. Supongamos que x_0 tiene densidad de Lebesgue positiva con respecto al conjunto $\mathbb{R}^n \setminus (\Omega(t_0) \cup \overline{G})$. Entonces existe un (x, t) -entorno V del punto (x_0, t_0) tal que $\Gamma(t) \cap V$ es una hipersuperficie C^∞ de dimensión n , transversal al hiperplano $t = t_0$. Además, θ es C^∞ en $V \cap \{(x, t) : x \in \Omega(t) \cup \Gamma(t), t > 0\}$.

Corolario 2.5. Las soluciones débiles radiales del problema de Stefan (SD) son soluciones clásicas del problema de Stefan (S).

CAPÍTULO II

EL PROBLEMA DE HELE-SHAW

1. El caso radial

Empezamos nuestro análisis considerando el caso más sencillo, el comportamiento de las soluciones radiales del problema de Hele-Shaw, que se pueden expresar de forma explícita y serán un modelo para desarrollos posteriores. En este caso la frontera libre es una esfera que se puede expresar en la forma $|x| = R(t)$ y la solución es clásica.

PROBLEMA DE HELE-SHAW RADIAL. Resolverlo consiste en encontrar funciones $R(t) \geq b$ y $p(x, t) = p(|x|, t) \geq 0$, definidas para $t > 0$ y $|x| \geq a$, que satisfagan

$$(HSR) \quad \begin{cases} \Delta p = 0 & \text{en } \{(x, t) | a < |x| < R(t), t > 0\}, \\ p = 0 & \text{si } |x| = R(t), t > 0, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = -LR'(t) & \text{si } |x| = R(t), t > 0, \\ p = A & \text{si } |x| = a, t > 0, \\ R(0) = b. \end{cases}$$

1.1. Solución radial explícita. La solución del problema (HSR) se puede obtener explícitamente de la siguiente forma:

DIMENSIÓN ESPACIAL $n \geq 3$. Puesto que $p(\cdot, t)$ es radial y armónica en $a < |x| < R(t)$, tenemos que

$$p(x, t) = c_1(t) + c_2(t)|x|^{2-n} \text{ para } a < |x| < R(t).$$

Imponiendo la condición en la frontera fija, $p(x, t) = A$ si $|x| = a$, y la condición de continuidad en la frontera libre, $p(x, t) = 0$ si $|x| = R(t)$, obtenemos que

$$(1.1) \quad p(x, t) = \frac{A [|x|^{2-n} - R^{2-n}(t)]_+}{a^{2-n} - R^{2-n}(t)}.$$

Finalmente, imponemos la condición de Stefan

$$\frac{A(2-n)R^{1-n}(t)}{a^{2-n} - R^{2-n}(t)} = -LR'(t),$$

es decir,

$$A(n-2)/L = a^{2-n}R^{n-1}(t)R'(t) - R(t)R'(t).$$

Integrando esta ecuación diferencial ordinaria en $(0, t)$ obtenemos una ecuación algebraica para $R(t)$:

$$(1.2) \quad \frac{R^n(t)}{na^{n-2}} - \frac{b^n}{na^{n-2}} - \frac{R^2(t)}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{A(n-2)t}{L}.$$

Esta ecuación tiene una única solución $R(t)$ para cada $t \geq 0$. Además, es trivial ver que $R(t)$ es una función creciente tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \infty$. Para ser más precisos,

$$(1.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{R_\infty(t)} = 1, \quad \text{con} \quad R_\infty(t) = c_\infty t^{1/n} \quad \text{y} \quad c_\infty = \left(\frac{Aa^{n-2}n(n-2)}{L} \right)^{1/n}.$$

Obsérvese que $p_t > 0$ si $a < |x| < R(t)$.

DIMENSIÓN ESPACIAL $n = 2$. Puesto que $p(\cdot, t)$ es radial y armónica en $a < |x| < R(t)$, tenemos que

$$p(x, t) = c_1(t) + c_2(t) \log |x| \quad \text{para} \quad a < |x| < R(t).$$

Imponiendo la condición en la frontera fija y la condición de continuidad en la frontera libre, obtenemos

$$(1.4) \quad p(x, t) = \frac{A [\log R(t) - \log |x|]_+}{\log R(t) - \log a}.$$

Finalmente, imponemos la condición de Stefan

$$\frac{A}{R(t)(\log a - \log R(t))} = -LR'(t),$$

es decir,

$$A/L = -RR' \log a + RR' \log R.$$

Integrando esta ecuación diferencial ordinaria en $(0, t)$ obtenemos una ecuación algebraica para $R(t)$:

$$(1.5) \quad \frac{R^2(t)}{2} \left(\log R(t) - \frac{1}{2} - \log a \right) - \frac{b^2}{2} \left(\log b - \frac{1}{2} - \log a \right) = \frac{At}{L}.$$

Esta ecuación tiene una única solución $R(t)$ para cada $t \geq 0$. De nuevo es fácil comprobar que $R(t)$ es una función creciente tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \infty$. Es más,

$$(1.6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R^2(t) \log R(t)}{t} = 2A/L.$$

Tomando logaritmos obtenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 2 \log R(t) \left(1 + \frac{\log \log R(t)}{2 \log R(t)} - \frac{\log t}{2 \log R(t)} \right) = \log \frac{2A}{L},$$

de donde necesariamente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{2 \log R(t)} = 1.$$

Combinando esto con (1.6) llegamos a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R^2(t)}{2(t/\log t)} = \frac{2A}{L},$$

de donde

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{R_\infty(t)} = 1, \quad \text{con} \quad R_\infty(t) = c_\infty(t/\log t)^{1/2} \quad \text{y} \quad c_\infty = 2\sqrt{A/L}.$$

En este caso también se cumple que $p_t > 0$ si $a < |x| < R(t)$, igual que en el caso $n \geq 3$.

1.2. Límite interior. Para comprender mejor el comportamiento asintótico de estas soluciones y su uso como modelo para el problema de Stefan, realizaremos un análisis de los límites interior y exterior. El límite interior o regular consiste en hacer $t \rightarrow \infty$ para x constante. Obtenemos inmediatamente de (1.1) que, en el caso $n \geq 3$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t) = P_{A,a}(x) \equiv Aa^{n-2}|x|^{2-n},$$

que es la solución del problema de Dirichlet exterior para el laplaciano:

$$\begin{cases} \Delta P = 0 & |x| > a, \\ P = A & |x| = a, \\ P(x) \rightarrow 0 & \text{cuando } |x| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

En efecto, tenemos la estimación

$$0 \leq P_{A,a}(x) - p(x, t) \leq \frac{Aa^{n-2}}{R^{n-2}(t) - a^{n-2}},$$

que, en vista de la estimación $R(t) \sim c_\infty t^{1/n}$, implica el siguiente resultado de convergencia:

Teorema 1.1. *Sea p la solución de (HSR) con $n \geq 3$. Entonces*

$$p(x, t) = P_{A,a}(x) + O(t^{(2-n)/n}).$$

En el caso $n = 2$ obtenemos de (1.4) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t) = A.$$

Obsérvese que la constante A es la solución del problema de Dirichlet exterior para el laplaciano:

$$\begin{cases} \Delta P = 0 & |x| > a, \\ P = A & |x| = a, \\ P(x) & \text{acotada.} \end{cases}$$

Es más, tenemos la estimación

$$0 \leq A - p(x, t) \leq \frac{A \log |x|}{\log R(t) - \log a},$$

que, en vista de la estimación $R(t) \sim c_\infty(t/\log t)^{1/2}$, implica el siguiente resultado de convergencia:

Teorema 1.2. Sea p la solución de (HSR) con $n = 2$. Entonces, sobre cada subconjunto compacto de $\{|x| \geq a\}$ tenemos que

$$p(x, t) = A + O(1/\log t).$$

1.3 Límite exterior. El desarrollo exterior está dado en términos de las nuevas variables

$$(1.7) \quad \begin{aligned} v &= pt^{(n-2)/n}, & \xi &= xt^{-1/n} & \text{si } n \geq 3, \\ v &= p \log R(t), & \xi &= x/R(t) & \text{si } n = 2, \end{aligned}$$

donde $R(t)$ es la solución de (1.5). En vista de (1.1) y (1.4) tenemos el siguiente resultado asintótico:

Teorema 1.3. Sea p una solución del problema (HSR) con $n \geq 2$ y sea v la función definida por (1.7) a partir de p . Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} v(\xi, t) &= Aa^{n-2}[|\xi|^{2-n} - c_\infty^{2-n}]_+ & \text{si } n \geq 3, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} v(\xi, t) &= A[-\log |\xi|]_+ & \text{si } n = 2, \end{aligned}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, donde c_∞ tiene el mismo significado que en (1.3).

En términos de las variables originales nuestro resultado de convergencia se puede escribir como

$$\begin{aligned} p(x, t) &\sim P_\infty(x, t) = Aa^{n-2}[|x|^{2-n} - R_\infty^{2-n}(t)]_+ & \text{si } n \geq 3, \\ p(x, t) &\sim P_\infty(x, t) = \frac{A[\log R(t) - \log |x|]_+}{\log R(t)} & \text{si } n = 2. \end{aligned}$$

Las funciones $P_\infty(x, t)$ son soluciones del problema de Hele-Shaw en el espacio perforado $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ con una singularidad como la de la solución fundamental cuando $|x| \rightarrow 0$.

2. El caso general. Límite interior

Sea $P(x)$ la solución del problema de Dirichlet exterior para el laplaciano,

$$(DE) \quad \begin{cases} \Delta P = 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus G, \\ P = g & \text{si } x \in \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} P(x) = 0 & \text{si } n \geq 3, \\ P(x) \text{ acotada} & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

Tenemos el siguiente resultado de convergencia:

Teorema 2.1. Sea $n \geq 2$. Entonces la solución débil del problema de Hele-Shaw converge cuando t tiende a infinito a la única solución, P , del problema de Dirichlet exterior (DE) uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n \setminus G$.

Prueba. Empezamos la prueba con algunos resultados auxiliares.

Lema 2.2. Sea G_1 un dominio con frontera regular tal que $\bar{G} \subset G_1 \subset \bar{G}_1 \subset \bar{G} \cup G_0$. Entonces existe una constante $\delta > 0$ tal que $p(x, t) \geq \delta$ para todo $x \in \partial G_1$, $t \geq 0$.

Prueba. Sea \hat{p} la solución del siguiente problema de valores de frontera:

$$\begin{cases} \Delta \hat{p} = 0 & x \in G_0, \\ \hat{p}(x) = g(x) & x \in \Gamma, \\ \hat{p}(x) = 0 & x \in \Gamma_0. \end{cases}$$

Entonces $p(x, t) \geq \hat{p}(x)$ para $x \in G_0$. La existencia de una constante $\delta > 0$ tal que $\hat{p}(x) \geq \delta$ para todo $x \in \partial G_1$ es una consecuencia del principio del máximo fuerte. \square

Lema 2.3. La frontera libre, $\Gamma(t)$, de una solución débil del problema de Hele-Shaw satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\Gamma(t), G) = \infty.$$

Prueba. Consideramos una solución radial \tilde{p} de (HSR) con a , b y A suficientemente pequeñas como para que $B_a \subseteq G$, $B_b \subseteq \bar{G} \cup G_0$ y $\tilde{p}(x, t) \leq \delta$ para $x \in \partial G_1$, donde δ es la constante proporcionada por el Lema 4.2 y $B_\rho \equiv B_\rho(0)$. Usando comparación en $\mathbb{R}^n \setminus G_1$ obtenemos que $\Omega(t) \cup G \supseteq \text{sop } \tilde{p}(\cdot, t) \cup B_a = B_{R(t)}$, con $R(t)$ dado por (1.2) o (1.5). Ahora bien, $R(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ y, por tanto, el soporte de p termina cubriendo cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n \setminus G$. \square

También tenemos una estimación *a priori* para la presión.

Lema 2.4. Hay una constante $C > 0$ tal que

$$0 \leq p(x, t) \leq C|x|^{2-n}.$$

Prueba. La función $\hat{p}(x, t) = C|x|^{2-n}$, que es armónica, es una solución débil del problema de Hele-Shaw con $\hat{\chi} = 0$, siguiendo la notación introducida en la sección I.2. Si tomamos $C > 0$ suficientemente grande, entonces $\hat{p}(x, t) \geq g(x)$ en Γ . De aquí se sigue el resultado por comparación (ver la observación que sigue a la proposición I.2.1). \square

Esta estimación y la armonicidad de p nos proporcionan estimaciones interiores Hölder uniformes (en t) para p , $D_i p$ y $D_{ij} p$. Estas estimaciones uniformes son válidas hasta la frontera fija Γ , por ser esta hipersuperficie regular. Por consiguiente, el teorema de Ascoli-Arzelà garantiza la existencia de una sucesión $\{t_n\}$ tal que $\{p(x, t_n)\}$ converge a una cierta función $p_\infty(x)$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n \setminus G$.

El siguiente paso es identificar el límite p_∞ . Utilizando las estimaciones *a priori* anteriores, es inmediato ver que

$$\begin{cases} \Delta p_\infty(x) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus G, \\ p_\infty(x) = g(x) & \text{si } x \in \Gamma. \end{cases}$$

Es más, $0 \leq p_\infty(x) \leq C|x|^{2-n}$. Por consiguiente, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} p_\infty(x) = 0$ si $n \geq 3$ y p_∞ está acotada si $n = 2$. Así pues, p_∞ es la única solución de (DE). La unicidad del límite implica que la convergencia no está restringida a una sucesión. De ahí el resultado. \square

En el siguiente lema describimos el comportamiento asintótico de $P(x)$ cuando $|x| \rightarrow \infty$.

Lema 2.5. *Sea $n \geq 2$. Existe una constante $C_* = C_*(g, G)$ tal que la solución P del problema (DE) satisface*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{n-2} P(x) = C_*(g, G).$$

Prueba. Consideramos la inversión $I : x \mapsto x/|x|^2$. Sea $\Omega^* = I(\mathbb{R}^n \setminus G) \cup \{0\}$. Así, Ω^* es el dominio acotado por $\partial\Omega^* = I(\Gamma)$. Sea $P^*(x) = |x|^{2-n} P(x/|x|^2)$ la transformada de Kelvin de P . Como P es armónica en $\mathbb{R}^n \setminus G$, también lo es P^* en $\Omega^* \setminus \{0\}$. Por consiguiente,

$$\begin{cases} \Delta P^* = 0 & \text{en } \Omega^* \setminus \{0\}, \\ P^*(x) = |x|^{2-n} g(x/|x|^2) & \text{si } x \in \partial\Omega^*. \end{cases}$$

Como, además, $0 \leq P(x) \leq C|x|^{2-n}$, se tiene que $0 \leq P^*(x) \leq C$. Por tanto P^* no puede ser singular en el origen y es la única solución de

$$\begin{cases} \Delta P^* = 0 & \text{en } \Omega^*, \\ P^*(x) = |x|^{2-n} g(x/|x|^2) & \text{si } x \in \partial\Omega^*. \end{cases}$$

Ahora bien,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{n-2} P(x) = P^*(0).$$

Esta última cantidad se puede calcular explícitamente y viene dada por

$$P^*(0) = \int_{\partial\Omega^*} |x|^{2-n} g\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \frac{\partial \mathcal{G}^*}{\partial \nu}(0, x) dS \equiv C_*(g, G),$$

donde \mathcal{G}^* es la función de Green para el dominio Ω^* . \square

3. El caso general. Límite exterior

Probamos que cerca de la frontera libre la solución del problema de Hele-Shaw converge a una solución radial autosemejante del mismo problema en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, de soporte compacto en x , con una singularidad como la de la solución fundamental cuando $|x| \rightarrow 0$. Queremos señalar que el límite exterior hereda información asintótica del límite interior. Más concretamente, en el límite exterior hay una constante libre que se determina a través de una conexión adecuada de ambos desarrollos.

Teorema 3.1. Sea p la solución débil al problema de Hele-Shaw y sea $C_* = C_*(g, G)$ la constante proporcionada por el lema 4.5.

A) Si $n \geq 3$, entonces

$$(3.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{(n-2)/n} |p(x, t) - \mathcal{P}(x, t)| = 0$$

uniformemente sobre conjuntos de la forma $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq \delta t^{1/n}\}$, $\delta > 0$, donde

$$\mathcal{P}(x, t) = C_* [|x|^{2-n} - (C_* n(n-2)t/L)^{(2-n)/n}]_+.$$

B) Si $n = 2$, entonces

$$(3.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \log \mathcal{R}(t) |p(x, t) - \mathcal{P}_2(x, t)| = 0$$

uniformemente sobre conjuntos de la forma $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq \delta \mathcal{R}(t)\}$, $\delta > 0$, donde $\mathcal{R}(t)$ es la única solución para $t > 0$ de

$$\frac{\mathcal{R}^2}{2} \left(\log \mathcal{R} - \frac{1}{2} \right) = \frac{C_* t}{L},$$

con

$$\mathcal{P}_2(x, t) = \frac{C_* [\log \mathcal{R}(t) - \log |x|]_+}{\log \mathcal{R}(t)}.$$

Observación. Cuando $t \rightarrow \infty$, $\mathcal{R}(t) \sim 2\sqrt{C_*/L} (t/\log t)^{1/2}$.

Prueba. Usando el lema 2.5 deducimos que, dado $\varepsilon > 0$, existe un valor $a \gg 1$ tal que

$$\left| P(x) - \frac{C_*}{|x|^{n-2}} \right| < \frac{\varepsilon}{2|x|^{n-2}} \leq \frac{\varepsilon}{a^{n-2}} \leq \varepsilon$$

si $|x| \geq a$. Ahora bien, el teorema 2.1 garantiza que existe un valor $T > 0$ tal que, para todo $t \geq T$ y $|x| = a$,

$$|p(x, t) - P(x)| < \varepsilon.$$

Combinando ambos hechos obtenemos que, para todo $t \geq T$ y $|x| = a$,

$$\left| p(x, t) - \frac{C_*}{|x|^{n-2}} \right| < \varepsilon.$$

Sean $m_+(t) = \max_{x \in \Gamma(t)} |x|$ y $m_-(t) = \min_{x \in \Gamma(t)} |x|$. Está claro que $m_+(t) \geq m_-(t) > a$ para todo $t > T$. Sean p^+ y p^- las soluciones del problema de Hele-Shaw radial (HSR) para $t \geq T$ con datos dados por

$$\begin{aligned} p^\pm &= (C_*/a^{n-2}) \pm \varepsilon \quad \text{si } |x| = a, \\ R_\pm(T) &= m_\pm(T), \end{aligned}$$

donde $R_+(t)$ y $R_-(t)$ son los radios de los soportes en tiempo t de p^+ y p^- respectivamente. Usando comparación para $|x| \geq a$, $t \geq T$ obtenemos que

$$(3.3) \quad p^-(x, t) \leq p(x, t) \leq p^+(x, t),$$

para $|x| \geq a$, $t \geq T$.

A) Consideramos la transformación de cambio de escala

$$p_\lambda(x, t) = \lambda^{(n-2)/n} p(\lambda^{1/n} x, \lambda t).$$

Un cálculo simple muestra que

$$|p_\lambda(\xi, 1) - \mathcal{P}(\xi, 1)| = \lambda^{(n-2)/n} |p(\lambda^{1/n} \xi, \lambda) - \mathcal{P}(\lambda^{1/n} \xi, \lambda)| = \lambda^{(n-2)/n} |p(x, \lambda) - \mathcal{P}(x, \lambda)|,$$

donde hemos usado la invariancia de \mathcal{P} con respecto al cambio de escala y la notación $x = \lambda^{1/n} \xi$. Se deduce que la convergencia uniforme de $p_\lambda(\xi, 1)$ a $\mathcal{P}(\xi, 1)$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$ sobre conjuntos de la forma $\{|\xi| \geq \delta\}$ es equivalente a la convergencia enunciada en (3.1).

Tomando ahora $x = \xi t^{1/n}$ y $t = 1$ en (3.3) y multiplicando la desigualdad resultante por $\lambda^{(n-2)/n}$, obtenemos

$$p_\lambda^-(\xi, 1) \leq p_\lambda(\xi, 1) \leq p_\lambda^+(\xi, 1)$$

para $|\xi| \geq a/\lambda^{1/n}$ y $\lambda \geq T$. Pero

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} p^\pm(\xi, 1) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{(C_* a^{2-n} \pm \varepsilon)[|\xi|^{2-n} - (R_\pm(\lambda)/\lambda^{1/n})^{2-n}]_+}{a^{2-n} - R_\pm^{2-n}(\lambda)} \\ &= (C_* \pm \varepsilon a^{n-2})[|\xi|^{2-n} - c_\pm^{2-n}]_+, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (C_* \pm \varepsilon a^{n-2})[|\xi|^{2-n} - c_\pm^{2-n}]_+ &= \mathcal{P}(\xi, 1), \end{aligned}$$

uniformemente en conjuntos de la forma $\{\xi : |\xi| \geq \delta\}$, $\delta > 0$, donde

$$c_\pm = ((C_* \pm \varepsilon a^{n-2})n(n-2)/L)^{1/n}.$$

Tenemos, por tanto, que, dados $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, hay un valor Λ tal que, para $|\xi| \geq \delta$ y $\lambda \geq \Lambda$ tenemos

$$|p_\lambda(\xi, 1) - \mathcal{P}(\xi, 1)| < \varepsilon,$$

que es el resultado de convergencia uniforme que necesitábamos.

B) Consideramos la transformación de cambio de escala

$$p_\lambda(x, t) = \log \mathcal{R}(\lambda) p(\mathcal{R}(\lambda)x, \lambda t).$$

Un cálculo simple muestra que

$$|p_\lambda(\xi, 1) - C_*[-\log |\xi|]_+| = \log \mathcal{R}(\lambda) |p(x, \lambda) - \mathcal{P}_2(x, \lambda)|,$$

donde hemos usado la notación $x = \mathcal{R}(\lambda)\xi$. Se sigue inmediatamente que la convergencia uniforme de $p_\lambda(\xi, 1)$ a $C_*[-\log|\xi|]_+$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$ sobre conjuntos de la forma $\{|\xi| \geq \delta\}$ es equivalente a la convergencia enunciada en (3.2).

Tomando ahora $x = \mathcal{R}(\lambda)\xi$ y $t = 1$ en (3.3) y multiplicando la desigualdad resultante por $\log \mathcal{R}(\lambda)$, obtenemos

$$p_\lambda^-(\xi, 1) \leq p_\lambda(\xi, 1) \leq p_\lambda^+(\xi, 1)$$

para $|\xi| \geq a/\mathcal{R}(\lambda)$ y $\lambda \geq T$. Pero

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} p_\lambda^\pm(\xi, 1) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{(C_* \pm \varepsilon)[\log(R_\pm(\lambda)/\mathcal{R}(\lambda)) - \log|\xi|]_+}{\frac{\log R_\pm(\lambda)}{\log \mathcal{R}(\lambda)} - \frac{\log a}{\log \mathcal{R}(\lambda)}} \\ &= (C_* \pm \varepsilon) \left[\frac{1}{2} \log \frac{C_* \pm \varepsilon}{C_*} - \log|\xi| \right]_+, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (C_* \pm \varepsilon) \left[\frac{1}{2} \log \frac{C_* \pm \varepsilon}{C_*} - \log|\xi| \right]_+ &= C_*[-\log|\xi|]_+, \end{aligned}$$

uniformemente sobre conjuntos de la forma $\{\xi : |\xi| \geq \delta\}$, $\delta > 0$. Obtenemos, por tanto, que, dados $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, hay un valor Λ tal que, para $|\xi| \geq \delta$ y $\lambda \geq \Lambda$ tenemos

$$|p_\lambda(\xi, 1) - C_*[-\log|\xi|]_+| < \varepsilon,$$

que es el resultado de convergencia uniforme que necesitábamos. \square

También probamos que la frontera libre se aproxima a una esfera con una tasa de crecimiento del radio determinada.

Teorema 3.2. Sean $m_+(t) = \max_{x \in \Gamma(t)} |x|$ y $m_-(t) = \min_{x \in \Gamma(t)} |x|$, donde $\Gamma(t)$ es la frontera libre de la solución del problema de Hele-Shaw. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_+(t)}{t^{1/n}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_-(t)}{t^{1/n}} = (C_* n(n-2)/L)^{1/n} & \text{si } n \geq 3, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_+(t)}{(t/\log t)^{1/2}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_-(t)}{(t/\log t)^{1/2}} = 2(C_*/L)^{1/2} & \text{si } n = 2. \end{aligned}$$

Prueba. Probamos el caso $n \geq 3$. El caso $n = 2$ es completamente análogo. A partir de (3.3) obtenemos que

$$\frac{R_-(t)}{t^{1/n}} \leq \frac{m_-(t)}{t^{1/n}} \leq \frac{m_+(t)}{t^{1/n}} \leq \frac{R_+(t)}{t^{1/n}}.$$

Por otra parte,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_\pm(t)}{t^{1/n}} = ((C_* \pm \varepsilon a^{n-2})n(n-2)/L)^{1/n}.$$

Como ε es arbitrario, tenemos inmediatamente el resultado. \square

CAPÍTULO III

EL PROBLEMA DE STEFAN

En este capítulo probamos que, si la dimensión espacial es mayor que uno, las soluciones del problema de Stefan en un dominio exterior se comportan asintóticamente exactamente igual que las soluciones del problema de Hele-Shaw con los mismos datos de frontera. Cuando $t \rightarrow \infty$ se pierde toda la información sobre el dato inicial. Aplicamos el mismo método que se utilizó en el capítulo II para el problema de Hele-Shaw. Hay una pequeña diferencia, ya que, en este caso, no conocemos soluciones radiales explícitas. A pesar de ello, conseguimos probar que, si $n \geq 2$, las soluciones radiales del problema de Stefan convergen cerca de la frontera libre a soluciones radiales y autosemejantes del problema de Hele-Shaw en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, de soporte compacto en x , con una singularidad como la de la solución fundamental cuando $|x| \rightarrow 0$. Esto será suficiente para estudiar el límite exterior de soluciones generales.

En la sección 1, tras probar algunos resultados preliminares relativos a soluciones radiales, estudiamos el límite exterior para este tipo de soluciones en el caso $n \geq 3$. El caso $n = 2$ es ligeramente diferente y se trata en la sección 2. Las soluciones generales se tratan en la sección 3, donde analizamos tanto el límite interior como el exterior.

1. Límite exterior para soluciones radiales ($n \geq 3$)

En el caso de soluciones radiales la frontera libre es obviamente una esfera, que se puede expresar en la forma $|x| = R(t)$, y la solución es clásica. La regularidad de la frontera libre hace el análisis más sencillo. El problema consiste en encontrar funciones $R(t) \geq b$ y $\theta(x, t) = \theta(|x|, t) \geq 0$, definidas para $t \geq 0$ y $|x| \geq a$, que satisfagan

$$(SR) \quad \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta \theta & \text{si } a < |x| < R(t), t > 0, \\ \theta = 0 & \text{si } |x| = R(t), t > 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial n} = -LR'(t) & \text{si } |x| = R(t), t > 0, \\ \theta = A & \text{si } |x| = a, t > 0, \\ \theta(x, 0) = \theta_0(|x|) & \text{si } |x| \geq a, \\ R(0) = b. \end{cases}$$

Las soluciones radiales al problema de Stefan se pueden comparar con soluciones radiales al problema de Hele-Shaw.

Proposición 1.1. Sean p y θ soluciones radiales al problema de Hele-Shaw y al problema de Stefan respectivamente, y sean $|x| = R_p(t)$ y $|x| = R_\theta(t)$ las correspondientes interfases. Si $R_p(0) > R_\theta(0)$ y $p(x, 0) \geq \theta(x, 0)$ y, además, $p(x, t) \geq \theta(x, t)$ en la frontera fija, es decir, para $|x| = a$ y $t > 0$, entonces $p(x, t) \geq \theta(x, t)$ para todo $|x| \geq a$ y $t \geq 0$.

Prueba. Sea T , que puede ser infinito, el primer tiempo en el que $R_p = R_\theta$. Gracias a la continuidad de la frontera libre de ambos problemas podemos asegurar que $T > 0$. Por otra parte, como hicimos notar en la sección 3, $p_t > 0$ para $a < |x| < R_p(t)$. Por consiguiente, p es una supersolución de la ecuación del calor en dicho conjunto. Aplicando comparación en $a \leq |x| \leq R_\theta(t)$, $0 \leq t \leq T$, obtenemos que $p(x, t) \geq \theta(x, t)$ para $0 \leq t \leq T$.

Probamos ahora que $T = \infty$. Supongamos que fuera finito. El lema de Hopf implicaría que

$$\frac{\partial p}{\partial n} < \frac{\partial \theta}{\partial n} \quad \text{para } |x| = R_p(T) = R_\theta(T), \quad t = T.$$

Usando la condición dinámica en la frontera libre obtendríamos $R'_p(T) > R'_\theta(T)$, una contradicción. \square

Esto conduce de forma inmediata a una estimación por arriba para la frontera libre de soluciones radiales al problema de Stefan.

Corolario 1.2. Sea $|x| = R(t)$ la frontera libre de una solución radial al problema de Stefan. Existen constantes $C, T > 0$ tales que para todo $t \geq T$,

$$\begin{aligned} R(t) &\leq Ct^{1/n} & n \geq 3, \\ R(t) &\leq C(t/\log t)^{1/2} & n = 2. \end{aligned}$$

Necesitaremos también una estimación por arriba para la temperatura. Esta estimación no está restringida a soluciones radiales.

Lema 1.3. Sea θ una solución débil al problema de Stefan para $n \geq 2$. Hay una constante $C > 0$ tal que

$$0 \leq \theta(x, t) \leq C|x|^{2-n}.$$

Prueba. La función $\hat{\theta}(x, t) = C|x|^{2-n}$, que es una solución estacionaria de la ecuación del calor, es también una solución débil del problema de Stefan con $\hat{f} = C|x|^{2-n}$, con la notación de la sección I.2. Si tomamos $C > 0$ suficientemente grande, $\hat{f}(x) \geq h(x) \geq f(x)$ y $\hat{\theta}(x, t) \geq g(x)$ en Γ . Aplicando la proposición I.2.2 se obtiene el resultado. \square

Para obtener una descripción más precisa del comportamiento asintótico de la frontera libre necesitamos transferir información de la zona interior a la exterior. La herramienta de transferencia básica es la identidad

$$\begin{aligned} (1.1) \quad & \int_{\rho \leq |x| \leq R(t)} (\theta(x, t) - \theta_0(|x|)) \, dx \\ &= -L\omega_n (R^n(t) - R^n(s(\rho))) - n\omega_n \rho^{n-1} \int_{s(\rho)}^t \left. \frac{\partial \theta}{\partial n}(x, \tau) \right|_{|x|=\rho} d\tau, \end{aligned}$$

donde ω_n es la medida de la bola unidad en \mathbb{R}^n , $a \leq \rho \leq R(t)$ y

$$s(\rho) = \begin{cases} R^{-1}(\rho) & \text{si } \rho \geq b, \\ 0 & \text{si } a \leq \rho \leq b, \end{cases}$$

de forma que $R(s(\rho)) = \max(\rho, b)$. Para obtener esta identidad integramos la ecuación en el conjunto $\{(x, \tau) : \rho \leq |x| \leq R(\tau), s(\rho) < \tau < t\}$ y aplicamos el teorema de la divergencia de Gauss y la condición dinámica en la frontera libre.

En el resto de la sección nos restringiremos al caso $n \geq 3$.

Teorema 1.4. *Sea $|x| = R(t)$ la frontera libre de la solución radial al problema de Stefan (SR) con $n \geq 3$. Entonces*

$$(1.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t^{1/n}} = (Aa^{n-2}n(n-2)/L)^{1/n}.$$

Prueba. Dividiendo (1.1) por $t\rho^{n-1}$ e integrando en $a \leq \rho \leq R(t)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_a^{R(t)} \frac{1}{\rho^{n-1}} \left(\int_{\rho \leq |x| \leq R(t)} (\theta(x, t) - \theta_0(|x|)) dx \right) d\rho &= \frac{L\omega_n R^n(t)}{(n-2)t} (R^{2-n}(t) - a^{2-n}) \\ &\quad - \frac{L\omega_n}{t} \left(\frac{b^n}{(n-2)} (a^{2-n} - b^{2-n}) + \frac{R^2(t)}{2} - \frac{b^2}{2} \right) + n\omega_n A. \end{aligned}$$

Si hacemos $t \rightarrow \infty$, el primer miembro de la igualdad tiende a cero, mientras que el segundo tiende a

$$-\frac{L\omega_n a^{2-n}}{(n-2)} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R^n(t)}{t} + n\omega_n A.$$

Para ver esto simplemente hay que usar la estimación por arriba para la frontera libre dada en el corolario 1.2 y la cota para θ dada en el lema 1.3. \square

Observación. La fórmula (1.2) muestra que la frontera libre hereda información asintótica de la frontera fija.

A continuación usamos esta información sobre el comportamiento asintótico de la frontera libre para obtener el comportamiento para tiempos grandes de la temperatura en la zona exterior.

Teorema 1.5. *Sea θ una solución radial al problema de Stefan (SR) con $n \geq 3$. Entonces*

$$(1.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{(n-2)/n} |\theta(x, t) - \mathcal{P}(x, t)| = 0$$

uniformemente sobre compactos de la forma $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq \delta t^{1/n}\}$, $\delta > 0$, donde

$$\mathcal{P}(x, t) = Aa^{n-2}||x|^{2-n} - (Aa^{n-2}n(n-2)t/L)^{(2-n)/n} |_+.$$

Prueba. Utilizamos la técnica del cambio de escala continuo, para lo que definimos la nueva temperatura

$$v(\xi, \tau) = t^{(n-2)/n} \theta(\xi t^{1/n}, t), \quad \tau = \frac{nt^{(n-2)/n}}{n-2}.$$

Esta v satisface la ecuación

$$(1.4) \quad v_\tau = \Delta v + \frac{1}{\tau} \left(v + \frac{1}{(n-2)} \nabla v \cdot \xi \right)$$

en el dominio $\alpha(\tau) \leq |\xi| \leq R_v(\tau)$, $\tau > 0$, donde $\alpha(\tau) = a/t^{1/n}$ y $R_v(\tau) = R(t)/t^{1/n}$. Además,

$$\begin{aligned} v(\xi, \tau) &= 0 & \text{si } |\xi| &= R_v(\tau), \\ v(\xi, \tau) &= At^{(n-2)/n} & \text{si } |\xi| &= \alpha(\tau). \end{aligned}$$

El teorema 1.4 implica que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_v(\tau) = (Aa^{n-2}n(n-2)/L)^{1/n} \equiv R_\infty.$$

Por tanto, dado $\tilde{\varepsilon} > 0$, existe un valor T tal que, para $\tau \geq T$

$$R_\infty - \tilde{\varepsilon} \leq R_v(\tau) \leq R_\infty + \tilde{\varepsilon}.$$

Supondremos sin pérdida de generalidad que $T > 1$.

Consideramos las soluciones, v^\pm , de (1.4) en $S_\pm \equiv \{(\xi, \tau) : \alpha(\tau) < |\xi| < R_\infty \pm \tilde{\varepsilon}, \tau > T\}$ con datos de frontera

$$\begin{aligned} v^\pm(\xi, \tau) &= 0 & \text{si } |\xi| &= R_\infty \pm \tilde{\varepsilon}, \tau \geq T, \\ v^\pm(\xi, \tau) &= At^{(n-2)/n} & \text{si } |\xi| &= \alpha(\tau), \tau \geq T, \end{aligned}$$

y datos iniciales continuos en tiempo $\tau = T$ tales que

$$\begin{aligned} v(\xi, T) &\leq v^+(\xi, T) & \text{si } \alpha(T) \leq |\xi| \leq R_\infty + \tilde{\varepsilon}, \\ v(\xi, T) &\geq v^-(\xi, T) \geq 0 & \text{si } \alpha(T) \leq |\xi| \leq R_\infty - \tilde{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Aplicando comparación vemos que $v \geq v^-$ en S^- y que $v \leq v^+$ en S^+ .

Para continuar con la prueba necesitamos conocer el comportamiento asintótico de v^+ y v^- . Viene dado en el siguiente lema:

Lema 1.6. Sea v una solución de (1.4) en $S \equiv \{(\xi, \tau) : \alpha(\tau) < |\xi| < d, \tau > T\}$ con dato de frontera

$$\begin{aligned} v(\xi, \tau) &= 0 & \text{si } |\xi| = d, \tau \geq T, \\ v(\xi, \tau) &= At^{(n-2)/n} & \text{si } |\xi| = \alpha(\tau), \tau \geq T, \end{aligned}$$

y dato inicial continuo en tiempo $\tau = T$. Entonces v converge a

$$w = Aa^{n-2}(|\xi|^{2-n} - d^{2-n})_+$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de $B_d \setminus \{0\}$.

Prueba. (i) Un cálculo sencillo produce

$$w_\tau - \Delta w - \frac{1}{\tau} \left(w + \frac{1}{(n-2)} \nabla w \cdot \xi \right) = \frac{Aa^{n-2}d^{2-n}}{\tau}.$$

Así, si definimos $\phi = w - v$, tenemos

$$(1.5) \quad \phi_\tau - \Delta \phi - \frac{1}{\tau} \left(\phi + \frac{1}{(n-2)} \nabla \phi \cdot \xi \right) = \frac{Aa^{n-2}d^{2-n}}{\tau}$$

en S y, además,

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \tau) &= 0 & \text{si } |\xi| = d, \tau \geq T, \\ \phi(\xi, \tau) &= -Aa^{(n-2)/n}d^{2-n} & \text{si } |\xi| = \alpha(\tau), \tau \geq T. \end{aligned}$$

Por consiguiente, tenemos que la función ϕ está acotada en la frontera parabólica de S . Queremos probar que de hecho ϕ está acotada en S . Debido al signo del término de orden cero el principio del máximo no produce el resultado directamente, y necesitamos hacer un argumento adicional.

Empezamos controlando $\psi = \phi/\tau$. Esta función verifica

$$L(\psi) \equiv \psi_\tau - \Delta \psi - \frac{1}{(n-2)\tau} \nabla \psi \cdot \xi = \frac{Aa^{n-2}d^{2-n}}{\tau^2}.$$

Además, ψ está acotada en la frontera parabólica de S .

Sea $\hat{\psi} = -C$, con $C > 0$. Entonces $L(\hat{\psi}) = 0 < L(\psi)$ y también $\hat{\psi} \leq \psi$ sobre la frontera parabólica si tomamos C suficientemente grande. Por consiguiente, $\psi \geq -C$ en S . Si ahora tomamos $\tilde{\psi} = -C_1|\xi|^2 + C_2$, con $C_1, C_2 > 0$, tenemos que

$$L(\tilde{\psi}) = 2nC_1 + \frac{2C_1|\xi|^2}{(n-2)\tau} > L(\psi)$$

sin más que tomar C_1 suficientemente grande. Escogemos entonces C_2 suficientemente grande de manera que $\tilde{\psi} \geq \psi$ sobre la frontera parabólica. Por tanto, $\psi \leq \tilde{\psi} \leq C_2$ en S y, por consiguiente, ψ está acotada.

Volviendo a la ecuación satisfecha por ϕ tenemos que

$$L(\phi) = \psi + \frac{Aa^{n-2}d^{2-n}}{\tau} \equiv f(\xi, \tau).$$

Gracias a la acotación para ψ que acabamos de obtener se tiene que $|f| \leq C$ en S .

Tomamos $\hat{\phi} = C_1|\xi|^2 - C_2$, con $C_1, C_2 > 0$. Obtenemos que

$$L(\hat{\phi}) = -2nC_1 - \frac{2C_1|\xi|^2}{(n-2)\tau} \leq -C \leq L(\phi)$$

sin más que tomar C_1 suficientemente grande, independiente de C_2 . Por otra parte, podemos tomar C_2 suficientemente grande como para que $\hat{\phi} \leq \phi$ en la frontera parabólica. Por consiguiente, $\phi \geq \hat{\phi} \geq -C_2$ en S . Si ahora tomamos $\tilde{\phi} = -C_1|\xi|^2 + C_2$, con $C_1, C_2 > 0$, tenemos que

$$L(\tilde{\phi}) = 2nC_1 + \frac{2C_1|\xi|^2}{(n-2)\tau} > C \geq L(\phi)$$

sin más que elegir C_1 suficientemente grande. Escogemos entonces C_2 suficientemente grande como para que $\tilde{\phi} \geq C$ sobre la frontera parabólica. Por consiguiente, $\phi \leq \tilde{\phi} \leq C_2$ en S . Resumiendo: hay una constante $M > 0$ tal que

$$|\phi| \leq M.$$

(ii) Probamos ahora que ϕ tiende a cero. Sea r_0 cualquier número tal que $0 < r_0 < d$. Tomamos $\tilde{T} \geq T$ tal que $\alpha(\tau) < r_0$ para $\tau \geq \tilde{T}$. Consideramos las soluciones $\hat{\phi}_{\pm}$ de (1.5) con datos de frontera

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{\pm}(\xi, \tau) &= 0 & \text{si } |\xi| = d, \tau \geq \tilde{T}, \\ \hat{\phi}_{\pm}(\xi, \tau) &= \pm M & \text{si } |\xi| = r_0, \tau \geq \tilde{T}, \end{aligned}$$

y datos iniciales continuos en tiempo $\tau = \tilde{T}$ tales que

$$\hat{\phi}_+(\xi, \tilde{T}) \geq \phi(\xi, \tilde{T}), \quad \hat{\phi}_-(\xi, \tilde{T}) \leq \phi(\xi, \tilde{T}).$$

El principio del máximo implica que

$$\hat{\phi}_-(\xi, \tau) \leq \phi(\xi, \tau) \leq \hat{\phi}_+(\xi, \tau) \quad \text{si } r_0 \leq |\xi| \leq d, \tau \geq \tilde{T}.$$

Por otra parte, es fácil probar (ver por ejemplo el teorema 2 del capítulo 6 en [F]) que

$$\hat{\phi}_{\pm} \rightarrow \pm M \left(\frac{|\xi|^{2-n} - d^{2-n}}{r_0^{2-n} - d^{2-n}} \right)$$

cuando $\tau \rightarrow \infty$ uniformemente en $r_0 \leq |\xi| \leq d$. De esta forma tenemos que, dado $\varepsilon > 0$, hay un número $T_1 \geq \tilde{T}$ tal que

$$(1.6) \quad |\phi(\xi, \tau)| \leq M \left(\frac{|\xi|^{2-n} - d^{2-n}}{r_0^{2-n} - d^{2-n}} \right) + \varepsilon$$

para $\tau \geq T_1$ y $r_0 \leq |\xi| \leq d$.

Supongamos dados $0 < \delta \leq d$ y $\varepsilon > 0$. Tomamos r_0 , $0 < r_0 < \delta$, lo suficientemente pequeño como para que

$$M \left(\frac{\delta^{2-n} - d^{2-n}}{r_0^{2-n} - d^{2-n}} \right) < \varepsilon.$$

Entonces, si tomamos en cuenta (1.6), tenemos que hay un valor $T_1 \gg 1$ tal que

$$|\phi(\xi, \tau)| \leq M \left(\frac{\delta^{2-n} - d^{2-n}}{r_0^{2-n} - d^{2-n}} \right) + \varepsilon$$

para $\tau \geq T_1$ y $\delta \leq |\xi| \leq d$, es decir, $|\phi(\xi, \tau)| \leq 2\varepsilon$. \square

CONTINUACIÓN DE LA PRUEBA DEL TEOREMA 1.5. Aplicando el lema 1.6 a v^{\pm} obtenemos que, dados $\varepsilon, \delta > 0$, para cada $\tilde{\varepsilon}$ hay un valor T tal que

$$|v^{\pm} - Aa^{n-2} [|\xi|^{n-2} - (R_{\infty} \pm \tilde{\varepsilon})^{2-n}]_{+}| < \varepsilon \quad \text{si } \delta \leq |\xi| \leq 1 \pm \tilde{\varepsilon},$$

para todo $\tau \geq T$. Así pues, tomando $\tilde{\varepsilon}$ suficientemente pequeño tenemos

$$\begin{aligned} v(\xi, \tau) &\leq v^{+}(\xi, \tau) \leq Aa^{n-2} [|\xi|^{2-n} - (R_{\infty} + \tilde{\varepsilon})^{2-n}]_{+} + \varepsilon \\ &\leq Aa^{n-2} [|\xi|^{2-n} - R_{\infty}^{2-n}]_{+} + 2\varepsilon \\ v(\xi, \tau) &\geq v^{-}(\xi, \tau) \geq Aa^{n-2} [|\xi|^{2-n} - (R_{\infty} - \tilde{\varepsilon})^{2-n}]_{+} - \varepsilon \\ &\geq Aa^{n-2} [|\xi|^{2-n} - R_{\infty}^{2-n}]_{+} - 2\varepsilon \end{aligned}$$

para todo $|\xi| \geq \delta$ y $\tau \geq T$. Para que la última desigualdad sea cierta para $|\xi| \geq R_{\infty} - \tilde{\varepsilon}$ basta con tomar $\tilde{\varepsilon}$ lo suficientemente pequeño como para que $Aa^{n-2} (|\xi|^{2-n} - R_{\infty}^{2-n})_{+} - 2\varepsilon \leq 0$ para $|\xi| \geq R_{\infty} - \tilde{\varepsilon}$.

En resumen: dados $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe un valor T tal que para todo $|\xi| > \delta$ y $\tau \geq T$,

$$|v - Aa^{n-2} [|\xi|^{2-n} - R_{\infty}^{2-n}]_{+}| \leq \varepsilon.$$

Traduciendo esto a las variables originales x y t obtenemos la convergencia uniforme enunciada en (1.3). \square

2. Límite exterior para soluciones radiales ($n = 2$)

En esta sección obtenemos el comportamiento asintótico tanto de la frontera libre como de la temperatura en la región exterior en el caso bidimensional.

Teorema 2.1. Sea $|x| = R(t)$ la frontera libre de la solución radial al problema de Stefan (SR) con $n = 2$. Entonces

$$(2.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{(t/\log t)^{1/2}} = 2\sqrt{A/L}.$$

Prueba. Dividiendo (1.1) por $t\rho$ e integrando en $a \leq \rho \leq R(t)$ obtenemos

$$(2.2) \quad \frac{1}{t} \int_a^{R(t)} \frac{1}{\rho} \left(\int_{\rho \leq |x| \leq R(t)} (\theta(x, t) - \theta_0(|x|)) dx \right) d\rho = -\frac{L\pi R^2(t)}{t} (\log R(t) - \log a) \\ + \frac{L\pi}{t} \left(b^2 \log \frac{b}{a} + \frac{R^2(t)}{2} - \frac{b^2}{2} \right) + 2\pi A.$$

Si hacemos $t \rightarrow \infty$, el primer miembro tiende a cero (lo comprobaremos con detalle) mientras que el segundo tiende a

$$-L\pi \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R^2(t) \log R(t)}{t} + 2\pi A.$$

Así pues,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R^2(t) \log R(t)}{t} = 2A/L,$$

de donde inmediatamente se obtiene (2.1).

Para ver que el primer miembro de (2.2) tiende a cero no basta con usar que la temperatura está acotada junto con la estimación por arriba para la frontera libre dada por el corolario 1.2. Necesitamos un argumento más elaborado. Sea

$$p(x, t) = \frac{C [\log(\bar{R}(t)/|x|)]_+}{\log(\bar{R}(t)/a)}$$

una solución radial al problema de Hele-Shaw tal que $p(x, t) \geq \theta(x, t)$. La proposición 1.1 garantiza que tal función p existe. Entonces

$$\left| \frac{1}{t} \int_a^{R(t)} \frac{1}{\rho} \left(\int_{\rho \leq |x| \leq R(t)} (\theta(x, t) - \theta_0(|x|)) dx \right) d\rho \right| \\ \leq \frac{C_1}{t \log(\bar{R}(t)/a)} \int_a^{R(t)} \frac{1}{\rho} \left(\int_{\rho \leq |x| \leq R(t)} \log(\bar{R}(t)/|x|) dx \right) d\rho \\ \leq \frac{C_2}{t \log(\bar{R}(t)/a)} \int_a^{R(t)} \frac{R^2(t) \log(\bar{R}(t)/R(t))}{\rho} d\rho \\ + \frac{C_2}{t \log(\bar{R}(t)/a)} \int_a^{R(t)} \left(\rho \left(\log(\rho/\bar{R}(t)) - \frac{1}{2} \right) + \frac{R^2(t)}{2\rho} \right) d\rho.$$

Se comprueba fácilmente que el segundo término del último miembro tiende a cero. Sólo queda por probar que el primer término,

$$\frac{C_2}{t \log(\bar{R}(t)/a)} \int_a^{R(t)} \frac{R^2(t) \log(\bar{R}(t)/R(t))}{\rho} d\rho = \frac{C_3 R^2(t) \log(\bar{R}(t)/R(t)) \log(R(t)/a)}{t \log(\bar{R}(t)/a)},$$

tiende a cero. Si probamos que $R(t)/\bar{R}(t) \geq C > 0$, el resultado se sigue inmediatamente. Supongamos que dicha desigualdad no fuera cierta. Entonces habría una subsucesión $\{t_n\}$ tal que $R(t_n)/\bar{R}(t_n) \rightarrow 0$. Como θ es acotada, el valor absoluto del primer miembro de (2.2) está acotado por

$$\frac{C}{t} \int_a^{R(t)} \frac{1}{\rho} (R^2(t) - \rho^2) d\rho = \frac{C}{t} \left(R^2(t) \log \frac{R(t)}{a} - \frac{R^2(t)}{2} + \frac{a^2}{2} \right).$$

Tomando $t = t_n$ y haciendo $n \rightarrow \infty$ esto tiende a

$$C \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R^2(t_n) \log R(t_n)}{t_n} = C_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R^2(t_n) \log R(t_n)}{\bar{R}^2(t_n) \log \bar{R}(t_n)} = 0.$$

Así, tomando $t = t_n$ en (2.2) y haciendo $n \rightarrow \infty$ llegamos a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R^2(t_n) \log R(t_n)}{t_n} = 2A/L,$$

una contradicción. \square

Teorema 2.2. Sea θ una solución radial al problema de Stefan (SR) con $n = 2$. Entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \log \mathcal{R}(t) |\theta(x, t) - \mathcal{P}_2(x, t)| = 0$$

uniformemente sobre conjuntos de la forma $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq \delta \mathcal{R}(t)\}$, $\delta > 0$, donde $\mathcal{R}(t)$ es la única solución para $t > 0$ de la ecuación

$$\frac{\mathcal{R}^2}{2} \left(\log \mathcal{R} - \frac{1}{2} \right) = \frac{At}{L},$$

con

$$\mathcal{P}_2(x, t) = \frac{A[\log \mathcal{R}(t) - \log |x|]_+}{\log \mathcal{R}(t)}.$$

Prueba. Introducimos un cambio de escala continuo en la temperatura, definiendo

$$v(\xi, \tau) = \log \mathcal{R}(t) \theta(\xi \mathcal{R}(t) x, t), \quad \tau = \int_0^t \frac{ds}{\mathcal{R}^2(s)},$$

que satisface

$$v_\tau - \Delta v = \frac{A}{L \log \mathcal{R}(t)} \left(\frac{v}{\log \mathcal{R}(t)} + \nabla v \cdot \xi \right)$$

si $\alpha(\tau) \leq |\xi| \leq R_v(\tau)$, donde $\alpha(\tau) = a/\mathcal{R}(t)$ y $R_v(\tau) = R(t)/\mathcal{R}(t)$. Además,

$$\begin{aligned} v(\xi, \tau) &= 0 & \text{si } |\xi| &= R_v(\tau), \\ v(\xi, \tau) &= A \log \mathcal{R}(t) & \text{si } |\xi| &= \alpha(\tau). \end{aligned}$$

También tenemos que $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \alpha(\tau) = 0$. Por otra parte, el teorema 2.1 implica que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_v(\tau) = 1.$$

De aquí en adelante se puede repetir la prueba del teorema 1.5 con cambios menores. Los más significativos son que ahora $w = A[\log d - \log |\xi|]$ y $\psi = \phi / \log \mathcal{R}(t)$. Los demás son obvios. \square

3. Soluciones generales

Estamos ya preparados para obtener los límites interior y exterior para soluciones generales al problema de Stefan, el principal propósito de esta parte de la memoria. En ambos casos el límite coincide con el del flujo de Hele-Shaw con los mismos datos de frontera.

3.1. Límite interior. Tenemos el siguiente resultado de convergencia, exactamente como el teorema II.2.1 para el problema de Hele-Shaw:

Teorema 3.1. *Sea $n \geq 2$. Entonces la solución débil al problema de Stefan converge cuando t tiende a infinito a la única solución, P , del problema de Dirichlet exterior (DE) uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n \setminus G$.*

Prueba. Necesitamos algunos resultados auxiliares.

Lema 3.2. *Sea G_1 un dominio con frontera regular tal que $\overline{G} \subset G_1 \subset \overline{G}_1 \subset \overline{G} \cup G_0$. Entonces existe una constante $\delta > 0$ tal que $\theta(x, t) \geq \delta$ para todo $x \in \partial G_1$ y $t \geq 0$.*

Prueba. Sea $\hat{\theta}$ la solución al siguiente problema de valores iniciales y de frontera:

$$\begin{cases} \hat{\theta} = \Delta \hat{\theta} & x \in G_0, t > 0, \\ \hat{\theta}(x, 0) = h(x) & x \in \Gamma_0, \\ \hat{\theta}(x, t) = g(x) & x \in \Gamma, t > 0, \\ \hat{\theta}(x, t) = 0 & x \in \Gamma_0, t > 0. \end{cases}$$

Entonces $\theta(x, t) \geq \hat{\theta}(x)$ para $x \in G_0, t > 0$. La existencia de una constante $\delta > 0$ tal que $\hat{\theta}(x, t) \geq \delta$ para todo $x \in \partial G_1$ y $t > 0$ es una consecuencia del principio del máximo fuerte. \square

Podemos probar que el soporte se expande para cubrir todo el espacio. Este resultado se enuncia sin prueba en [M].

Lema 3.3. *La frontera libre, $\Gamma(t)$, de una solución débil al problema de Stefan satisface*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\Gamma(t), G) = \infty.$$

Prueba. Consideramos una solución radial $\tilde{\theta}$ de (SR) con a, b, A y $\tilde{\theta}(x, 0)$ suficientemente pequeños como para que $B_a \subseteq G$, $B_b \subseteq \overline{G} \cup G_0$ y $\tilde{\theta}(x, t) \leq \delta$ para $x \in \partial G_1$, donde δ es la constante proporcionada por el lema 3.2. Usando comparación en $\mathbb{R}^n \setminus G_1$ obtenemos que $\Omega(t) \cup G \supseteq \text{sop } \tilde{\theta}(\cdot, t) \cup B_a = B_{R(t)}$, donde $R(t)$ es el radio de la frontera libre de $\tilde{\theta}$ en tiempo t . Los teoremas 1.4 y 2.1 garantizan que $R(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ y por tanto el soporte de θ acaba cubriendo cada subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n \setminus G$. \square

Definimos $\theta_s(x, t) = \theta(x, t + s)$. El lema 1.3 implica que

$$0 \leq \theta_s(x, t) \leq C|x|^{2-n}.$$

Esta estimación y el hecho de que θ_s es una solución de la ecuación del calor en el interior de su conjunto de positividad nos proporcionan estimaciones Hölder interiores uniformes (en s) para θ_s , $D_t \theta_s$, $D_i \theta_s$ y $D_{ij} \theta_s$, dependientes sólo de C y de la distancia del subconjunto bajo consideración a la frontera parabólica. Es más, estas estimaciones son válidas hasta la frontera fija $\Gamma \times [0, \infty)$, por ser esta hipersuperficie regular (ver [F]). El teorema de Ascoli-Arzelà garantiza la existencia de una sucesión $\{s_n\}$ tal que $\theta_{s_n}(x, t)$ converge a una cierta función $\theta_\infty(x, t)$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $(\mathbb{R}^n \setminus G) \times [0, \infty)$.

El paso siguiente es identificar el límite θ_∞ . Es inmediato ver que

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_\infty}{\partial t} = \Delta \theta_\infty = 0 & \text{en } (\mathbb{R}^n \setminus G) \times [0, \infty), \\ \theta_\infty(x, t) = g(x) & \text{si } x \in \Gamma. \end{cases}$$

Necesitamos la siguiente estimación en L^2 :

Lema 3.4. *Sea θ la solución débil del problema de Stefan para $n \geq 2$. Entonces*

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n \setminus G} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx dt \leq C.$$

Prueba. Repetimos la prueba del lema 3.4 de [FK] considerando funciones de penalización, β_ϵ , con la propiedad adicional

$$\beta'_\epsilon(t) \leq C/\epsilon \quad \text{para } 0 \leq t < \epsilon,$$

y tomando en cuenta la observación que sigue al teorema 3 del mismo artículo. \square

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus G} |\theta(x, s) - \theta(x, t + s)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus G} \left| \int_s^{s+t} \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, \tau) d\tau \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus G} \left(t \int_s^{s+t} \left| \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, \tau) \right|^2 d\tau \right) dx. \end{aligned}$$

Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n \setminus G$. La última desigualdad y el lema 3.4 conducen a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\theta(\cdot, s_n) - \theta(\cdot, t + s_n)\|_{L^2(K)} = 0.$$

Por otra parte, sabemos que $\theta(x, t + s_n) \rightarrow \theta_\infty(x, t)$ uniformemente en K , y por tanto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\theta(\cdot, s_n) - \theta(\cdot, t + s_n)\|_{L^2(K)} = \|\theta_\infty(\cdot, 0) - \theta_\infty(\cdot, t)\|_{L^2(K)}.$$

Concluimos que $\theta_\infty(x, t) = \theta_\infty(x, 0)$, es decir, θ_∞ no depende de t . Así pues,

$$\begin{cases} \Delta \theta_\infty(x) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus G, \\ \theta_\infty(x) = g(x) & \text{si } x \in \Gamma. \end{cases}$$

Además, $0 \leq \theta_\infty(x) \leq C|x|^{2-n}$. Por consiguiente $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \theta_\infty(x) = 0$ si $n \geq 3$ y θ_∞ está acotada si $n = 2$. Por lo tanto θ_∞ es la única solución de (DE). La unicidad del límite implica que la convergencia no está restringida a una sucesión. De ahí el resultado. \square

3.2. Límite exterior. Tenemos el siguiente resultado de convergencia, idéntico al teorema II.3.1 para el problema de Hele-Shaw:

Teorema 3.5. *Sea θ la solución débil al problema de Stefan y sean $C_* = C_*(g, G)$, \mathcal{P} , \mathcal{P}_2 y \mathcal{R} como en el teorema II.3.1.*

A) Si $n \geq 3$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(n-2)/n} |\theta(x, t) - \mathcal{P}(x, t)| = 0$$

uniformemente sobre conjuntos de la forma $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq \delta t^{1/n}\}$, $\delta > 0$.

B) Si $n = 2$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \log \mathcal{R}(t) |\theta(x, t) - \mathcal{P}_2(x, t)| = 0$$

uniformemente sobre conjuntos de la forma $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq \delta \mathcal{R}(t)\}$, $\delta > 0$.

Prueba. Como en la prueba del teorema II.3.1, usando el teorema 3.1 y el lema II.2.4 podemos probar que, dado $\varepsilon > 0$, existen valores a y T tales que para todo $t \geq T$ y $|x| = a$,

$$\left| \theta(x, t) - \frac{C_*}{|x|^{n-2}} \right| < \varepsilon.$$

Sean $m_+(t) = \max_{x \in \Gamma(t)} |x|$ y $m_- = \min_{x \in \Gamma(t)} |x|$. Sean θ^+ y θ^- las soluciones al problema de Stefan radial (SR) para $t \geq T$ que en $t = T$ toman datos radiales, continuos y no negativos tales que $\theta^-(x, T) \leq \theta(x, T) \leq \theta^+(x, T)$, y que verifican

$$\begin{aligned}\theta^\pm &= (C_*/a^{n-2}) \pm \varepsilon \quad \text{si } |x| = a, \\ R_\pm(T) &= m_\pm(T),\end{aligned}$$

donde $R_+(t)$ y $R_-(t)$ son los radios de los soportes de θ^+ y θ^- respectivamente. Aplicando comparación para $|x| \geq a$ y $t \geq T$ obtenemos que

$$(3.1) \quad \theta^-(x, t) \leq \theta(x, t) \leq \theta^+(x, t),$$

para $|x| \geq a$ y $t \geq T$.

A) A partir de (3.1) obtenemos

$$t^{(n-2)/n} \theta^-(\xi t^{1/n}, t) \leq t^{(n-2)/n} \theta(\xi t^{1/n}, t) \leq t^{(n-2)/n} \theta^+(\xi t^{1/n}, t)$$

para $|\xi| \geq a/t^{1/n}$, $t \geq T$. Pero, como θ^\pm son soluciones radiales, podemos aplicar el teorema 1.5 para obtener que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(n-2)/n} \theta^\pm(\xi t^{1/n}, t) = (C_* \pm \varepsilon a^{n-2})[|\xi|^{2-n} - \bar{c}_\pm^{2-n}]_+$$

uniformemente sobre conjuntos de la forma $\{\xi : |\xi| \geq \delta\}$, $\delta > 0$, donde

$$c_\pm = ((C_* \pm \varepsilon a^{n-2})n(n-2)/L)^{1/n}.$$

De aquí en adelante la prueba continúa como en el teorema II.3.1.

B) A partir de (3.1) obtenemos

$$\log \mathcal{R}(t) \theta^-(\xi \mathcal{R}(t), t) \leq \log \mathcal{R}(t) \theta(\xi \mathcal{R}(t), t) \leq \log \mathcal{R}(t) \theta^+(\xi \mathcal{R}(t), t)$$

para $|\xi| \geq a/\mathcal{R}(t)$, $t \geq T$. A partir de aquí se repiten las ideas de A). \square

En relación con la frontera libre, podemos repetir la prueba del teorema II.3.2 para obtener que el comportamiento asintótico es exactamente el del problema de Hele-Shaw.

Teorema 3.6. Sean $m_+(t) = \max_{x \in \Gamma(t)} |x|$ y $m_-(t) = \min_{x \in \Gamma(t)} |x|$, donde $\Gamma(t)$ es la frontera libre de la solución al problema de Stefan. Entonces


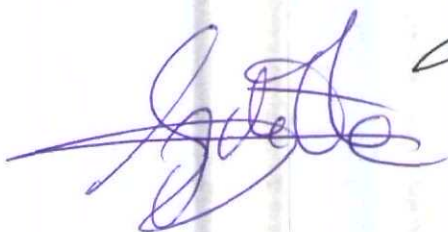
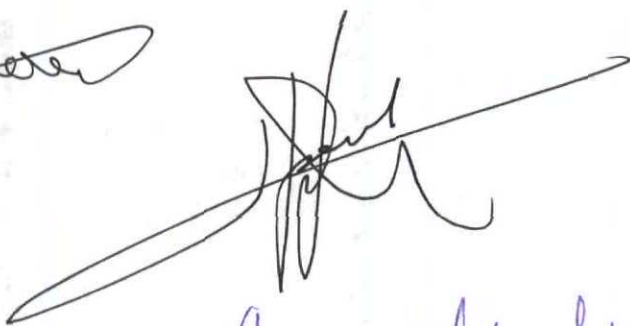
$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_+(t)}{t^{1/n}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_-(t)}{t^{1/n}} = (C_* n(n-2)/L)^{1/n} & \text{si } n \geq 3, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_+(t)}{(t/\log t)^{1/2}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_-(t)}{(t/\log t)^{1/2}} = 2(C_*/L)^{1/2} & \text{si } n = 2.\end{aligned}$$

REFERENCIAS

- [C] L.A. Caffarelli, *The regularity of free boundaries in higher dimensions*, Acta Math. **139** (1977), 155–184.
- [CF] L.A. Caffarelli y A. Friedman, *Continuity of the temperature in the Stefan problem*, Indiana Univ. Math. J. **28** (1979), no. 1, 53–70.
- [D] G. Duvaut, *Résolution d'un problème de Stefan (Fusion d'un bloc de glace à zéro degré)*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **276** (1973), 1461–1463.
- [EJ] C.M. Elliot y V. Janovský, *A variational inequality approach to Hele-Shaw flow with a moving boundary*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **88A** (1981), 93–107.
- [F] A. Friedman, "Partial differential equations of parabolic type", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.
- [FK] A. Friedman y D. Kinderlehrer, *A one phase Stefan problem*, Indiana Univ. Math. Jour. **24** **11** (1975), 1005–1035.
- [KLV] J.R. King, A.A. Lacey y J.L. Vázquez, *Persistence of corners in free boundaries in Hele-Shaw flow*, Euro. Jnl. Appl. Math. **6** (1995), 445–490.
- [KN] D. Kinderlehrer y L. Nirenberg, *The smoothness of the free boundary in the one phase Stefan problem*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 257–282.
- [LR] B. Louro y J.F. Rodrigues, *Remarks on the quasi-steady one phase Stefan problem*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **102A** (1986), 263–275.
- [M] H. Matano, *Asymptotic behavior of the free boundaries arising in one phase Stefan problems in multi-dimensional spaces*, en "Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Science (Tokyo, 1982)", North-Holland Math. Stud., **81**, 1983, pp. 133–151.
- [Me] A.M. Meirmanov, "The Stefan problem", Walter de Gruyter, Berlín, 1992.
- [MGR] J.A. McGeough y H. Rasmussen, *On the derivation of the quasi-steady model in electromechanical machining*, J. Inst. Math. Applics. **13** (1974), 13–21.
- [R] S. Richardson, *Hele-Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel*, J. Fluid Mech. **56** (1972), 609–618.
- [Ru] L.I. Rubinstein, "The Stefan problem", Zvaigzne, Riga, 1967 (en ruso); traducción al inglés, *Transl. Math. Monographs*, vol. **27**, AMS, Providence, 1971.
- [ST] P.G. Saffman y G.I. Taylor, *The penetration of fluid into a porous medium Hele-Shaw cell*, Proc. Royal Soc. A **245** (1958), 312–329.
- [V] J.L. Vazquez, *Singular solutions and asymptotic behaviour of nonlinear parabolic equations*, en "International Conference on Differential Equations; Barcelona 91" (Equadiff-91), (C. Perelló, C. Simó y J. Solà-Morales eds.), World Scientific, Singapur, 1993, pp. 234–249.

Reunido el tribunal que suscribe en el día
de la fecha, acordó calificar la presente Tesis
doctoral con Apto cum laude

MADRID, 30 Septiembre 1996



L. A. Peler